

华南理工大学

2011 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

(请在答题纸上做答, 试卷上做答无效, 试后本卷必须与答题纸一同交回)

科目名称: 应用数学基础 (含概率论、常微分方程)

适用专业: 系统分析与集成

本卷满分: 150 分

共 2 页

一、(20 分) 按要求做下列各题:

(1) 根据资料统计表明, 某一 3 口之家患某种传染病的概率有如下规律:

$$P(\text{孩子得病})=0.6, \quad P(\text{母亲得病}|\text{孩子得病})=0.5,$$

$P(\text{父亲得病}|\text{母亲得病及孩子得病})=0.4$, 求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率。

(2) 设 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$, 求证 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$ 。

二、(15 分) 设随机变量 ξ 与 η 相互独立, 且都服从参数为 3 的 Poisson 分布, 试证明 $\xi+\eta$ 仍服从 Poisson 分布, 且参数为 6。

三、(20 分) 若随机变量 ξ 服从分布: $P(\xi=k)=p(1-p)^{k-1}$, ($k=1,2,3,\dots$), 其中: $0 < p < 1$, 求 ξ 的特征函数 $f(t)$, 数学期望 $E(\xi)$ 和方差 $D(\xi)$ 。

四、(20 分) 设 $\{\xi_n\}$ 为独立随机变量序列,

(1) 针对序列 $\{\xi_n\}$, 写出 Lindeberg 条件;

(2) 如果存在常数序列 $\{L_n\}$, 使得如下条件成立:

$$\max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \leq L_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{B_n} = 0, \quad \text{其中, } B_n^2 = \sum_{k=1}^n D(\xi_k), \quad D(\xi_k) \text{ 是 } \xi_k \text{ 的方差。}$$

试证明： $\{\xi_n\}$ 满足中心极限定理。

五、(21 分) 求解如下微分方程：

(1) $x^2 y^2 y' - 1 = y$;

(2) $y' = 2 \left(\frac{y+2}{x+y-1} \right)^2$;

(3) $y(1+2xy)dx - xdy = 0$ 。

六、(16 分) 考虑如下的非齐次微分方程

$$(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = x^2 + 1$$

(1) 求该非齐次方程的多项式特解；

(2) 求相应的齐次方程的多项式特解；

(3) 求微分方程的通解。

七、(18 分) 求如下方程的通解和周期解

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z \\ \dot{y} = x + 2z \\ \dot{z} = -2x + y - z \end{cases}$$

八、(20 分) 设 a 为大于零的实数，考虑微分方程

$$\frac{dy}{dx} = (y+a)^2$$

(1) 求其通解；

(2) 求满足条件 $y(0) = 0$ 的特解 $y_1(x)$ ；

(3) 设 $J = [0, \beta)$ 为 $y_1(x)$ 的右侧最大存在区间，求 β 。