641

华南理工大学

2011 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（请在答题纸上做答，试卷上做答无效，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：线性代数

适用专业：概率论与数理统计

本卷满分：150 分　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　共 3 页

一、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1．设 $A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&m\end{pmatrix}$，$B$ 是 n 阶单位矩阵，则行列式 $\begin{vmatrix}0&A\\B&0\end{vmatrix}=$（　　　　）。

（A）$-m!$；（B）$(-1)^{mn}m!$；（C）$(-1)^{m+n}m!$；（D）$m!$。

2．设 A 为 n 阶方阵，$|A|=a\neq 0$，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $|A^*|=$（　　　）。

（A）a；（B）$1/a$；（C）a^{n-1}；（D）a^n。

3．设 β_1，β_2 是线性方程组 $AX=B$ 的两个不同解，α_1，α_2 是对应齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，k_1，k_2 是任意数，则方程组 $AX=B$ 的通解（一般解）是（　　　）。

（A）$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$；（B）$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$；

（C）$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$；（D）$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$。

4．n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$（$3\le s\le n$）线性无关的充分必要条件是（　　　）。

（A）存在不全为零的数 k_1，k_2，$\cdots$，k_s，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$；

（B）α_1，α_2，$\cdots$，α_s 中任意两个向量都线性无关；

（C）α_1，α_2，$\cdots$，α_s 中存在一个向量，它不能用其余向量线性表示；

（D）α_1，α_2，$\cdots$，α_s 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示。

5．下列命题正确的是（　　　）。

（A）方阵 A 的两个特征向量的和还是 A 的特征向量；

（B）特征方程相同的两个方阵一定相似；

（C）正交矩阵的特征根一定是实数；

（D）实对称矩阵 A 的属于不同特征根的特征向量一定正交。

6．设 A 、 B 为 n 阶正定矩阵， A^T 为 A 的转置，则下列矩阵未必为正定矩阵的是（　　　）。

（A） $A+B$ ； （B） AB ； （C） A^{-1} ； （D） A^TA 。

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1．设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \\ -1 & 6 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$，则 $3A_{13}+7A_{23}-5A_{33}+5A_{43}=$ ________

2．设 A 为3阶方阵，满足 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，

则 $A=$

3．已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3=3 \\ x_1+ax_2-2x_3=0 \end{cases}$ 无解，则 $a=$________

4．设向量组 $\alpha_1=(1,2,-2)$， $\alpha_2=(4,t,3)$， $\alpha_3=(3,-1,1)$ 的秩为 2，

则 $t=$________

5．设 3 阶方阵 A 的每一行元素和为 2，则 A 一定有特征向量 $X=$________

6．设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_2x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 ________

三、计算题（每小题 12 分，共 72 分）

1．计算行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 。

2．已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$ ，问 a 和 b 各取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在有无穷多解的情况下，试求一般解。

3. 设 A、B 为 3 阶方阵， E 是单位矩阵，$AB+E=A^2+B$。又 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 B。

4．已知 $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^{2010}。

5．用正交变换 $X=PY$ 化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$ 为标准形。

6．设 A 为 3 阶方阵，X 为 3 阶列向量，X，AX，A^2X 线性无关，$A^3X=3AX-A^2X$，记 $P=(X,AX,A^2X)$，求 $B=P^{-1}AP$。

四、证明题（共 30 分）

设 A、B 是 n 阶方阵，$AB=0$。记 $B=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$。证明：

1）任一 X_i 均可由齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系线性表示；

2）秩(A)＋秩$(B)\le n$；

3）若 $A^2=A$，则有：秩(A)＋秩$(E-A)=n$。