625

华南理工大学
2011 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（请在答题纸上做答，试卷上做答无效，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：数学分析

适用专业：基础数学，计算数学，概率论与数理统计，应用数学，运筹学与控制论

本卷满分：150 分　　共 3 页

1．（10 分）设函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某个邻域内有定义且在该点处可导，定义函数

$$\psi(t) = f^2(x_0 + at) - f^2(x_0 - at)$$

其中 a 为常数，求导数 $\psi'(0)$

2．（10 分）设 k 为自然数，求数列

$$x_n = \sqrt[k]{n^{k-1}}\left(\sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}\right)$$

的极限。

3．（10 分）计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots。$$

4．（10 分）讨论函数

$$w = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)}$$

的极值。

5．（10 分）求二重积分

$$I = \iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy,$$

其中 D 是由 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成的区域。

6.（10 分）计算积分

$$\iint_S xdydz + zdxdy$$

其中 S 为抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在 $z\le 0$ 部分，方向取下侧。

7.（12 分）判断如下广义积分的收敛性

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}\cdot|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}},$$

其中 $a_1<a_2<\cdots<a_n$， $0<p_i\ (i=1,2,\cdots,n).$

8.（18 分）设 $p\ge 1$ 为正常数，试证：

1）如果 $0<a<b$，则 $b^{\frac{1}{p}}-a^{\frac{1}{p}}\le (b-a)^{\frac{1}{p}}$；

2） 函数 $f(x)=\sin(x^{-p})$ 在区间 $[c,1)(1>c>0)$ 上一致连续；

3） 函数 $f(x)=\sin(x^{-p})$ 在开区间 $(0,1)$ 上不一致连续。

9.（15 分）已知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

试证明极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

存在。

10.（15 分）设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则存在数列 $\{x_n\}\subset[a,+\infty)$，满足条件

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$$

11.（15 分）计算积分

$$\oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + 2y^2}$$

其中 L 为以 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 为圆心、以 a 为半径的圆周（$a > 0$ 且 $a \neq \frac{1}{2}$），顺时针方向。

12.（15 分）证明椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

的周长为

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt\,,$$

且

$$\pi(a+b) \le s \le \pi\sqrt{2a^2 + 2b^2}\ 。$$