华南理工大学
2011年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（请在答题纸上做答，试卷上做答无效，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：高等代数

适用专业：基础数学, 计算数学, 概率论与数理统计, 应用数学, 运筹学与控制论

1. (20 分) 设 x_0 是数域 P 上的多项式 $u(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$ 的 k 重根, 记 $v(x)=f(x_0)g(x)-f(x)g(x_0)$ 为非零多项式. 试证: x_0 为数域 P 上多项式 $v(x)$ 的 $k+1$ 重根. 反之亦然.

2. (20 分) 设 A, B 是数域 P 上的 n 阶方阵, $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$. 已知齐次线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$ 分别有 l, m 个线性无关的解向量, 这里 $l\geq 0, m\geq 0$. 证明：

(1) 方程组 $(AB)X=0$ 至少有 $max\{l,m\}$ 个线性无关的解向量;

(2) 若 $l+m>n$, 则 $(A+B)X=0$ 必有非零解;

(3) 如果 $AX=0$ 和 $BX=0$ 无公共的非零解向量, 且 $l+m=n$, 则 P^n 中任一向量 α 都可唯一地表示成 $\alpha=\beta+\gamma$, 这里 β, γ 分别是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的解向量.

3. (15 分) 设 A, B, C, D 为 n 阶方阵. 若 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的秩是 n, 证明：

$$\begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix}=0.$$

而且, 若 A 是可逆的, 则 $D=CA^{-1}B$.

4. (15 分) 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换, W 是 V 的子空间, $\mathcal{A}W$ 表示 W 中向量的像组成的子空间, 证明:

$$dim(\mathcal{A}W)\geq r(\mathcal{A})+dimW-n.$$

5. (20 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为数域 P 上的 n 维线性空间上的一组基, A 为 P 上的一个 $n \times s$ 矩阵. 若

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A,$$

则 $L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$ 的维数 $= r(A)$.

6. (20 分) 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{kl})_{n\times n}$ 为两个半正定的实对称矩阵. 证明: n 阶实方阵

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & a_{n2}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

也是半正定的.

7. (25 分) 用 J 表示元素全为 1 的 n 阶矩阵, $n \geq 2$, 设 $f(x) = a + bx$ 是有理数域 Q 上的一元多项式, 令 $A = f(J)$,

(1) 求 J 的全部特征值和全部特征向量;

(2) 求 A 的所有特征子空间;

(3) A 是否可以对角化? 如果可对角化, 求出 Q 上的一个可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵, 并写出这个对角矩阵.

8. (15 分) 设 A 是 n 阶复矩阵, 证明:

$$A^n = 0 \text{ 当且仅当 } tr(A^k) = 0, k = 1, 2, , ..., n,$$

这里 $tr(X)$ 表示方阵 X 的迹.