# 中山大学

## 二OO五年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：363

科目名称：高等数学(A)

考试时间：1月23日上午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄原题。

一，完成下列各题：(每小题 7 分，共 28 分)

1，求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\arctan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$，n 为自然数.

2，设 $f(x,y,z)=\arctan\left(\frac{x^3}{1+x^2(y-1)^2}+x(z-3)^4\right)$，

求偏导数 $f_x(1,1,3)$

3，计算积分：$I=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)dy$

4，求 $f(x,y,z)=x+y-z^3$ 在椭球面

$x^2+y^2+3z^2=2$ 上的最大值和最小值.

二，完成下列各题：(每小题 8 分，共 32 分)

1，设 A 为 n 阶方阵，E 为 n 阶单位矩阵，$A^2=E$，

证明：A 的特征值只能是 $\pm1$.

2，计算积分：

$I=\int_l(e^x\sin2y-y)dx+(2e^x\cos2y-100)dy$，

其中 $l$ 是从 A(1,0) 到 $B(-1,0)$ 的上半圆周.

考试完毕，试题和草稿纸随答题纸一起交回。

3, 计算积分:

$$I=\iint_S \frac{\sin x}{1+y^2}dydz-2dzdx+2zdxdy$$

其中 S 是曲面 $z=e^y(0\le x\le 2,0\le y\le 1)$

的下侧.

4, 求微分方程 $y'=-(x+y+1)^2$ 的全部解.

三,(每小题 9 分, 共 18 分)

1, 设 $f$ 为 $(0,+\infty)$ 上的可微函数,;

$f(x)>0,\forall x\in(0,+\infty)$; $f'(x)$ 连续且单调下降,

$\lim\limits_{n\to+\infty}f'(x)=0$, 证明: 级数

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f'(n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{f'(n)}{f(n)}$ 有相同的敛散性,

即同时收敛, 同时发散.

2, 在 $x=0$ 处将 $f(x)=\ln(6+x-x^2)+\sin^2 x$

展开成幂级数, 并求级数的收敛半径和收敛域.

四,(11 分) 设 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,

$f(a)=f(b)=0$,证明:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$$

五, (11 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(0,3)$

上可导, 且 $f(0)+f(1)=2, f(3)=1$, 证明:

存在 $\xi\in(0,3)$ 使 $f'(\xi)=0$.

六, (12 分) 求方程 $y'''-4y'=32xe^{2x}+5\sin x$ 的通解.

七, (12 分) 设 $k$ 为固定的正整数, 记

$\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{x^k-1}=\frac{P_n(x)}{(x^k-1)^{n+1}}$, 其中 $P_n(x)$ 是一个

多项式, 求 $P_n(1)$.

八, (13 分) 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1 \\ 3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=t \end{cases}$$

1) $p,t$ 取何值时, 方程组无解;

2) $p,t$ 取何值时, 方程组有解; 求出全部解.

九, (13 分) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$,

E 为 4 阶单位矩阵, $B=(E+A)^{-1}(E-A)$,

求 $(E+B)^{-1}$.