

中山大学

二〇〇五年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 810

科目名称: 数学初试综合考试

考试时间: 1月23日下午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上, 答
在试题纸上的不得分! 请用蓝、黑
色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写
清题号, 不必抄原题。

(注意: 请只选做其中两部分, 选作三部分以上者不予计分)

第一部分: 常微分方程 (75分)

一、求下列方程的通解 (20分):

1、 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + 2y^4}{xy^3}$

2、 $(y^2 - y)dx + xdy = 0$ 。

二、(15分)求微分方程

$y'' + 3y' + 3y = e^{-x}(x-5)$
的通解, 这里 $y = y(x)$ 。

三、(18分)求方程组 $x' = Ax$ 的基解矩阵, 其中 x 为三维列向量,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

四、(10分)求下列方程组的奇点, 并判别其类型 (即指出是焦点、结点、鞍点或者中心) 和稳定性。

1、 $x' = x, y' = -y$

2、 $x' = -4x - y - 2, y' = 2x - y + 4$

五、(12分)设 $p(x), q(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (*)$$

的两个线性无关的解。证明

(1) 方程 (*) 的系数 $p(x), q(x)$ 由 $y_1(x), y_2(x)$ 唯一确定;

(2) $y_1(x), y_2(x)$ 没有共同的零点。

三. 树的问题 (15 分)

1. 给出一棵如图 1 所示的树，
试分别写出“先根”和“后根”
两种遍历方式下的访问顺序。
2. 已知一棵二叉树的“中根”和“后根”
访问顺序分别为：
BDCEAFHG 和 DECBHGEA，试画出这棵二叉树，
并简要说明理由。

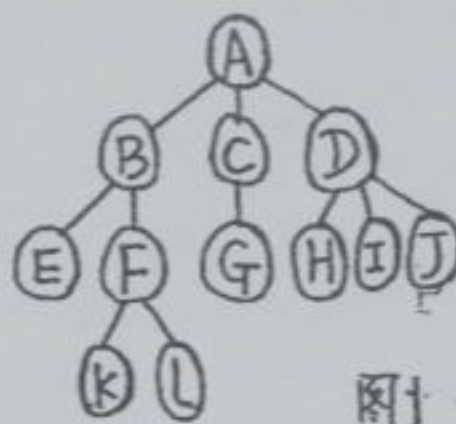


图 1

四. 排序及检索 (25 分)

1. 列举五种常见的排序方法。
2. 设有一个待排序的数列：{5, 7, 3, 8, 2, 9, 1, 4}，要用冒泡法对其
排序，试列出每一轮冒泡后数列中各元素的排列。
3. 设有一个已从小到大排序的 N 个元素的实型表 A，要用二分法在其中搜
索元素 x，试对其实现函数进行填空：(找到时返回位置值，否则返回-1)

```

int BinarySearch( _____ (1) _____ )
{ int left= _____ (2) _____; int right= _____ (3) _____;
  while ( left <= right )
  { int middle = _____ (4) _____;
    if (x==A[middle]) _____ (5) _____;
    if (x > A[middle]) _____ (6) _____;
    else _____ (7) _____;
  }
  _____ (8) _____;
}
  
```

第二部分：概率论与数理统计（75分）

1. (10分) 设某种产品由三种机器A, B, C生产, 设这些产品的20%由A生产, 30%由B生产, 50%由C生产. 三种机器A, B, C生产的产品中, 其次品率分别为1%, 2%和3%. 假定随机地选取一个产品并发现它是次品, 求这个产品由B生产的概率?

2. (10分) 设随机变量 X 的概率密度函数(p.d.f.)为:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x & 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

求(a) $P(X \leq 1.5)$; (b) 方差 $\text{Var}(X + 1.5)$.

3. (10分) 设随机变量 X 有密度函数为 $N(0, \sigma^2)$ 的正态分布, Y 为 $(0, \pi)$ 上的均匀分布, 假设 X 和 Y 是独立的, 求 $Z = X + 2\cos Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

4. (10分) 设随机变量 X 有参数为 $B(n, p)$ 的二项分布, Y 为 $(-a, a)$ 上的均匀分布, 假设 X 和 Y 独立, 求 $Z = X + Y$ 的特征函数 $\varphi_Z(u)$.

5. (10分) 设随机变量 $X \geq 0$ 且 $E(X) = 0$, 求证: $P(X = 0) = 1$.

6. (15分) 设总体 X 服从均匀分布 $U(0, \theta)$, $\theta \in (0, \infty)$ 是未知参数, 样本值为 x_1, x_2, \dots, x_n . (a) 求参数 θ 的最大似然估计; (b) 所求得的最大似然估计是 θ 的无偏估计吗? 为什么?

7. (10分) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为样本, $\alpha \in (0, 1)$. 分别写出方差 $\text{Var}(X) = \sigma^2$ 已知和未知时置信水平为 $1 - \alpha$ 的均值 EX 的置信区间, 并阐明置信区间的意义.

第三部分：复变函数（75分）

一、(40分) 判断下列命题是否正确，并说明理由或举反例。

- (1) 若解析函数 $f(z)$ 在区域 D 有无穷多个零点，则 $f(z)$ 在区域 D 恒等于零。
- (2) 若复变函数 $f(z)$ 在区域 D 有一阶导数，则 $f(z)$ 在区域 D 有任意阶导数。
- (3) 设 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < R$ 解析， z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点，则 $\text{Res}(f(z), z_0) = \infty$ 。

(4) $f(z)$ 在区域 D 解析，对某一点 $z_0 \in D$ ，有 $f^{(n)}(z_0) = 0, n = 1, 2, \dots$ ，则 $f(z)$ 为常数。

(5) 解析函数 $f(z)$ 在区域 D 单叶的充要条件是：对于任何 $z \in D, f'(z) \neq 0$ 。

二、(9分) 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是复平面上的解析函数， $|f(z)| \leq |g(z)|$ ，证明： $f(z) = cg(z)$ 其中 c 为常数。

三、(9分) 求方程 $z^3 - 4z^2 + z^2 - 1 = 0$ 在 $|z| < 1$ 内的根的个数。

四、(9分) 求 $\frac{1}{z^2 - 1}$ 在 $0 < |z - 1| < 1$ 及 $0 < |z + 1| < 1$ 的罗朗展开式

五、(8分) 用留数计算积分： $I = \int_{\gamma} \frac{x^{1-a}}{1+x} dx$ ，其中 $1 < a < 2$ ，

第四部分：抽象代数（75分）

1, 设 A, B 是 G 的子群，则 AB 是 G 的子群的充要条件是： $AB = BA$ 。

(10分)

2, 设 A, B 是 G 的正规子群，且 $G = A \times B$ ，证明：

$$G/A \cap B \cong A/A \cap B \times B/A \cap B. \quad (10 \text{ 分})$$

3, 证明，域的乘法群的有限子群是循环群。(15分)

4, 设 I_s , $s=1,2,\dots$, 是环 R 的理想的升链, 即有 $I_1 \subset I_2 \subset \dots$,

证明: $I = \bigcup_{s=1}^{\infty} I_s$ 环 R 的理想。(10 分)

5, 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中, 证明 (x, n) 是极大理想的充要条件是: n 为素数。(15 分)

6, 求 $[Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}):Q]$, 并证明 $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 是单扩张, 既有 α , 使 $Q(\alpha) = Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 。(15 分)

第五部分: 计算方法 (75 分)

1. (20 分) 若 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ 有 n 个不同的实根 x_1, x_2, \dots, x_n . 证明:

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \begin{cases} 0 & 0 \leq k \leq n-2 \\ a_n^{-1} & k = n-1 \end{cases}$$

2. (15 分) 求函数 $f(x)$ 在指定区间上的最佳平方逼近一阶多项式.

kaoyan.com

$$(1) f(x) = \frac{1}{x}, [1, 3]$$

$$(2) f(x) = e^x, [0, 1]$$

$$(3) f(x) = \cos \pi x, [0, 1]$$

3. (20 分) 设 $\|\cdot\|$ 为某一矩阵范数. 若矩阵 B 满足 $\|B\| < 1$. 证明 $I - B$ 为非奇异矩阵, 且

$$\|(I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}.$$

4. (20 分) 证明迭代公式

$$x_{k+1} = \frac{x_k(x_k^2 + 3a)}{3x_k^2 + a}$$

当初值 x_0 充分靠近根 \sqrt{a} ($a > 0$) 时收敛, 并且求

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a} - x_{k+1}}{(\sqrt{a} - x_k)^3}.$$

第六部分：程序设计（75 分）

一、单项选择题。（下列各题 A、B、C、D 四个选项中，只有一个选项是正确的，请将正确选项做在答题纸上。每小题 2 分，10 小题共 20 分。）

1、可用作 C 语言用户标识符的一组标识是：

- A) my_file stdio.h record
- B) 2a Do ABC
- C) _value void define
- D) main Case good_morning

2、若变量已经正确定义并赋值，符合 C 语言语法的表达式是：

- A) a+=b+7;
- B) a=b+7,a++
- C) int(12.0%4)
- D) a=b+7=c+b

3、若给定条件表达式(M?)(a++):(a--), 则其中表达式(M)与下述表达式等价的是：

- A) (M == 0)
- B) (M == 1)
- C) (M != 0)
- D) (M != 1)

4、若 k1、k2、k3、k4 都是整类型变量，为将整数 10 赋给 k1 和 k3，将整数 20 赋给 k2 和 k4，则对应以下 scanf 语句的正确输入方式是：

```
scanf("%d%d",&k1,&k2);  
scanf("%d,%d",&k1,&k2);
```

(选择项中，“□”表示一个空格字符，“<CR>”表示回车键。)

- A) 1020<CR>1020<CR>
- B) 10□20<CR>10□20<CR>
- C) 10,20<CR>10,20<CR>
- D) 10□20<CR>10,20<CR>

5、以下不正确的 if 语句形式是:

- A) if(x>y);
- B) if(x<y) {x++; y++;}
- C) if(x==y) x+=y;
- D) if(x!=y) scanf("%d",&x)
else scanf("%d",&y);

6、以下一维数组 a 的正确定义是:

- A) int a[];
- B) int n=10,a[n];
- C) int n;
scanf("%d",&n);
int a[n];
- D) #define n 10
int a[n];

7、字符串 "At\n012\\\" 的长度是:

- A) 8
- B) 9
- C) 10
- D) 11

8、若有以下说明语句,

```
static int a[][3]={1,3,5,7,9,11};  
int m=1,n=2;
```

则对于数组元素正确引用的是:

- A) a[m]+n
- B) *(a+6)
- C) (*(a+m)+3)
- D) (*(a+m)+n)

9、若有以下说明语句,

```
int a[4][5], *p, *q[4], i=0;
```

则错误的赋值语句是:

- A) p=a;
- B) q[i]=a[i];
- C) p=a[i];
- D) q[i]=&a[i][0];

10、若有以下说明语句,

```
struct student
```

```
{  
    int age;  
    char name[10];  
    float score;
```

```
} stud, *p;
```

```
p=&stud;
```

则对于结构体变量中成员非法引用的是:

- A) stud.name
- B) student.name
- C) p->name
- D) (*p).name

二. 阅读下列程序段, 请将程序正确执行结果做在答题纸上。(每小题 4 分, 5 小题共 20 分。)

1.

```
#include <stdio.h>
#define PT 3.5
#define S(X) PT*X*X
main()
{
    int a=1, b=2;
    printf("%g\n", S(a+b));
}
```

2.

```
#include <stdio.h>
main()
{
    int n=0, s=0;
    while(s<100)
    {
        ++n;
        s+=n*n;
    }
    printf("n=%d\n", n-1);
}
```

3.

```
#include <stdio.h>
int sum(int k);
main()
{
    int s, i;
    for(i=1; i<=10; i++)
        s=sum(i);
    printf("s=%d\n", s);
}
int sum(int k)
{
    static int x=0;
    return(x+=k);
}
```

4.

```
#include <stdio.h>
main()
{
    char **p, *a[]={"dog", "cat", "home"};
    p=a;
    printf("%s,%c\n", *(p+2), *((p+2)+2));
}
```



```

5.
#include <stdio.h>
main()
{
    static int a[]={2,6,10,14,18};
    static *ptr[]={&a[0],&a[1],&a[2],&a[3],&a[4]};
    int **p,i;
    p=ptr;
    for(i=0;i<5;i++)
        a[i]=a[i]/2+a[i];
    printf("%d\n",*(*(++p)));
    printf("%d\n",*(*(p+2)));
}

```

三. 阅读下面的程序, 请将程序完成的功能以及正确执行结果写在答题纸上。(每小题 7.5 分, 2 小题共 15 分。)

```

1.
#include <stdio.h>
#include <string.h>
void process_string(char *p,int m)
{
    int i,j;
    char temp;
    for(i=0,j=m-1;i<j;++i,--j)
    {
        temp=p[i];
        p[i]=p[j];
        p[j]=temp;
    }
}
main()
{
    int m;
    char *p,str[10];
    strcpy(str,"ABCDEF");
    m=strlen(str);
    p=str;
    process_string(p,m);
    printf("%s\n",p);
}

```

```

2.
#include <stdio.h>
#define M 3
void move(int *p)
{
    int i,j,temp;
    for(i=0;i<M;i++)
        for(j=i;j<M;j++)

```

```

    {
        temp=*(p+M*i+j);
        *(p+M*i+j)=*(p+M*j+i);
        *(p+M*j+i)=temp;
    }
}
main()
{
    int a[M][M],*p,i,j;
    for(i=0;i<M;i++)
        for(j=0;j<M;j++)
            *(a+i+j)=i*M+j;
    p=a[0];
    move(p);
    for(i=0;i<M;i++)
    {
        for(j=0;j<M;j++)
            printf("%3d",a[i][j]);
        printf("\n");
    }
}

```

四. 请按照要求编写程序写在答题纸上。(每小题 10 分, 2 小题共 20 分。)

1. 一个素数, 当它的数字位置对换以后仍然为素数, 这样的素数成为绝对素数。比如, 13 和 31 数字位置对换以后都是素数, 因此它们都是绝对素数。请写两个函数分别实现两位数的数字位置对换和判断素数, 用主函数调用这两个函数, 求 10 到 99 之间所有的两位绝对素数, 并输出结果。

2. 由键盘输入 10 个字符串 (每个字符串长度不超过 10), 按字典顺序依次存放在二维数组中, 最后将结果输出。

第七部分: 数据结构 (75 分)

一. 字符串问题 (15 分)

1. 设有一个字符串 "ABCE", 试写出其所有可能的真子串。
2. 写出统计任意一个字符串的长度的实现函数。

二. 链表问题 (20 分) (必要时可自行假设某些条件)

1. 设要在单链表中删除一个节点, 试将下列操作排序:
 - () 使指针 p 指到被删除节点的直接前驱。
 - () 释放被删除节点所占的内存。
 - () 使指针 q 指到被删除节点。
 - () 使被删除节点的前驱节点和后继节点相链接。
2. 设节点的链接指针分量名为 next, 试写出实现上述操作的实现代码。
3. 简要比较链表和数组在实现数据存取及维护等方面各自的特点。