

中山大学

二〇〇五年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 710

科目名称: 数学分析与高等代数

考试时间: 1 月 23 日 上午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上,
答在试题纸上的不得分! 请用
蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。
答题要写清题号, 不必抄题。

一、数学分析 (80分)

1 (16分) 设 $f(x) = \begin{cases} e^x(\sin x + \cos x), & x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c, & x > 0 \end{cases}$,

确定常数 a, b, c , 使得 $f''(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 处处存在。

2 (16分) 设 $y = a \sin x$ ($a > 0$), 试确定参数 a , 使得曲线 $y = a \sin x$ 和它在点 $(\pi, 0)$ 的法线方程, 以及 y 轴所围成区域的面积最小。

3 (16分) 计算曲面积分

$$\iint_S 2(1-x^2)dydz + 8xydzdx - 4xzdx dy,$$

其中 S 是曲线 $x = e^y$ ($0 \leq y \leq a$) 绕 x 轴旋转而成的曲面的外侧。

4 (16分) 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{2|x|}{x^2 + n^3})$ 的收敛域, 并证明该级数在收敛域是一致收敛的。

5 (16分) 设 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 有定义, 试证 $f(x)$ 在 (a, b) 一致连续的充要条件是: 若 $\{x_n\}$ 是 (a, b) 中的收敛列, 则 $\{f(x_n)\}$ 也是收敛列。

二、高等代数 (70分)

1 (15 分) 由三个函数 $1, \cos t, \sin t$ 生成的实线性空间记为 V , 求线性变换

$$T: V \rightarrow V, f(t) \mapsto f\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ 的迹、行列式和特征多项式.}$$

2 (15 分) 设 A 是秩为 n 的 $m \times n$ 实矩阵, b 为 m 维向量, 若 n 维向量 x 满足 $A^T A x = A^T b$, 证明对一切不等于 x 的 n 维向量 y , 有 $|b - Ax| < |b - Ay|$.

(注. $|x| = \sqrt{(x, x)}$)

3 (15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, 复矩阵 $B = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$,

(1) A 是否相似于对角矩阵?

(2) 求 B 的行列式.

4 (15 分) 证明实线性空间的线性变换必有 1 维或 2 维的不变子空间.

5 (10 分) 证明正定矩阵的最大元素位于对角线上.