中 山 大 学

二00五 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：314

科目名称：数学（四） （单考）

考试时间：1 月23 日上 午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

一、填空题（本题共 6 小题，每题 4 分，共 24 分）

（按顺序把答案写在答题纸上，注明题号或序号）

1. 齐次线性方程组：

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$
只有零解，则 λ 应该满足的条件是______。

2. 已知 $AB-A+E=0$，则 $A^{-1}=$________。

3. 事件 A 与自身相互独立，且 $P(A)\neq 0$，A 可以是__________（写出一个即可）。

4. 设函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}+xe^{-x}$，则 $f'(1)=$________。

5. 设 $y=x+\ln x$，则 $\dfrac{dx}{dy}=$________。

6. 若 $f(1)=2$，$f'(1)=2$，则极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f^3(1+\Delta x)-f^3(1)}{\Delta x}=$________。

二、选择题（本题共 8 小题，每题 4 分，共 32 分）

（选择正确答案的代号写在答题纸上，注明题号）

1. 下式中 $f(x)$ 中 x^4 的系数是（ ）：

$$f(x)=\begin{vmatrix}-x & 3 & 1 & 3 & 0\\ x & 3 & 2x & 11 & 4\\ -1 & x & 0 & 4 & 3x\\ 2 & 21 & 4 & x & 5\\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2\end{vmatrix}$$

(a) 25； (b) 35； (c) 26； (d) -16。

2. 可逆矩阵 A 与矩阵（ ）有相同的特征值。

(a) A^{-1}； (b) A'； (c) A^2； (d) $A+E$。

3. 设 Ω 为样本空间，P 为概率，ξ 为定义在 Ω 上的非负随机变量，则 $P\{\xi<0\}=$（ ）：

(a) 1； (b) 0； (c) $\dfrac{1}{2}$； (d) $\dfrac{1}{3}$。

考试完毕，试题和草稿纸随答题纸一起交回。

4. 设A,B为事件，$\overline{A},\overline{B}$分别为它们的对立事件，则命题(　　)是正确的：

(a) 如果A,B互不相容，那么$\overline{A},\overline{B}$也互不相容； (b) 如果$A,B$独立，那么$\overline{A},\overline{B}$也独立；

(c) 如果A,B相容，那么$\overline{A},\overline{B}$也相容； (d) 如果$A,B$对立，那么$\overline{A},\overline{B}$不对立。

5. 积分$\int e^{-|x|}dx=(\ )$。

(a) $e^{-|x|}+c$

(b) $\begin{cases}-e^{-x}+c & x\geq 0\\ e^{x}+c & x<0\end{cases}$

(c) $\begin{cases}-e^{-x}+c & x\geq 0\\ e^{x}+c-2 & x<0\end{cases}$

(d) $\begin{cases}e^{x}+c & x\geq 0\\ -e^{-x}+c & x<0\end{cases}$

6. 积分$\int|x|dx=(\ )$。

(a) $|x|+c$

(b) $x|x|+c$

(c) $\frac{1}{2}x^2+c$

(d) $\frac{1}{2}x|x|+c$

7. 若$f'(e^x)=x+1$，则$f(x)=(\ )$。

(a) $\frac{1}{2}x^2+x+c$

(b) xe^x+c

(c) x^2+c

(d) $x\ln x+c$

8. 若$\ln|x|$是函数$f(x)$的一个原函数，则下列函数中为$f(x)$原函数的是$(\ )$。

(a) $\ln|cx|\ \ (c\neq 0)$

(b) $\ln|x+c|$

(c) $(\ln|x|)^2$

(d) $2\ln|x|$

三、解答题（本题共9小题，共94分）

1. (9分)

已知$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}$，　$B=\begin{bmatrix}1&0&3&2\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{bmatrix}$

用矩阵分块法求AB(写清楚具体的分块，否则不得分)。

2. (10分)

设A与B相似，试证明：

（1）A'与B'相似。

（2）当A可逆时，A^{-1}与B^{-1}相似。

3. （9分）
某班有 a 人，请问至少有两人生日相同的概率是多少？设一年有 365 天。

4. （10分）
已知：A 为事件，P 为事件的概率，若 $P(A)=0$，证明：A 与任何事件独立。

5. （12分）
某高山滑雪场计划在 11 月（11 月有 30 天）完成门票收入 a 元。进入该滑雪场的游客人数与天气有关，若气温不低于 $0°C$，在晴天，游客数为 α 人/天，而在非晴天，则为 β 人/天；若气温低于 $0°C$，则在晴天，游客数为 η 人/天，而在非晴天，则为 μ 人/天。根据往年的经验，11 月中气温低于 $0°C$ 的天数为 t，晴天的概率为 p。规定每票只允许一人进场，且该月每天的票价相同，试求该滑雪场票价至少应定为多少（元/张）才能完成此计划？用数学公式表达。

6. （10分）
计算累次积分 $I=\int_1^3 dy\int_y^3 \frac{dx}{y\ln x}$

7. （11分）
讨论二元函数 $z=x^3+y^3-2(x^2+y^2)$ 的极值。

8. （11分）
求椭圆 $x^2+2xy+3y^2-8y^2=0$ 与直线 $x+y=8$ 之间的最短距离。

9. （12分）
设 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$，
（1）求函数的增减区间及极值。
（2）求函数图像的凹凸区间及拐点。
（3）求其渐近线。
（4）作出其图形。