中　山　大　学

二00六 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：　413

科目名称：　数理逻辑

考试时间：　1 月 15 日 下 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

一. 选择题（本题共 30 分，每小题 5 分）

1. 下面哪个命题是命题“明天不下雨并且明天不出太阳”的否定：
   (a) 明天不下雨或者明天出太阳
   (b) 明天下雨并且明天出太阳
   (c) 明天不下雨并且明天出太阳
   (d) 如果明天不下雨，则明天出太阳

2. 用命题形式表达如下复合命题：如果张三追求王二，则李四不追求王二；否则李四追求王二。其中正确的表达是：
   (a) $(p\to\neg q)\to(\neg p\to q)$　　(b) $(p\to\neg q)\vee(\neg p\to q)$
   (c) $(p\to\neg q)\wedge(\neg p\to q)$　　(d) $(p\to q)\vee(\neg p\to\neg q)$

3. 设 S(x)代表“x 是学生”，T(x)代表“x 是教师”，L(x,y)代表“x 喜欢 y”，则命题“所有学生都喜欢某些老师”可用下列哪个公式表达
   (a) $\forall x(S(x)\to L(x,y))$　　(b) $\forall x\exists y(S(x)\wedge T(y)\wedge L(x,y))$
   (c) $\forall x(S(x)\to(\exists y)\,T(y)\wedge L(x,y))$　　(d) $\forall x\exists y(S(x)\wedge T(y)\to L(x,y))$

4. 下述论证形式中，哪个不是有效论证？
   (a) $p\to q,\ \neg q;\ \therefore\neg p$　　(b) $\neg p\vee q,\ p\to(r\wedge s), s\to q;\ \therefore q\vee r$
   (c) $p\to(q\vee r),\ \neg r;\ \therefore\neg q\to\neg p$　　(d) $p\to q,\ \neg(q\to r)\to\neg p;\ \therefore p\to r$

5. 全体含有 n 个不同的命题变元的重言式给出的不同的 n 元真值函数的个数是：
   (a)　1 个　　(b)　n 个　　(c)　n^2 个　　(d)　2^n 个

6. 设 A、B 是一阶语言 L 中的公式，I 是语言 L 的某一解释，v 是解释 I 下的任一个赋值。则下面关于解释和赋值的说法中，不正确的是：
   (a)若赋值 v 不满足公式 A，则 v 满足公式$\neg$A
   (b)若 A 在解释 I 下不真，$\neg$A 也可能在解释 I 下不真。
   (c)若赋值 v 满足 A$\to$B，则 v 不满足 A 或 v 满足 B
   (d)若 A$\to$B 在解释 I 下为真，则 A 在 I 下为假或 B 在 I 下为真

考试完毕，试题和草稿纸随答题纸一起交回。

二．简答下述问题（本题共 16 分，每小题 8 分）：

1．叙述可判定性的概念，并说明通常的命题演算公理系统是否为可判定的。

2．叙述项 t 对变元 x 在一阶公式 A 中代入自由的概念；
并判断变元 x_2 对公式 $(\forall x_2)A_1(f(x_2)) \rightarrow (\exists x_3)A_2(x_1, x_2, x_3)$ 中的 x_1 是否代入自由。

三．判断下述说法是否正确并说明理由。（本题 16 分，每小题 8 分）

1．若一阶公式 A 和 B 都是可满足的，则公式 $A \wedge B$ 也是可满足的。

2．若某个一阶公式集 S 是不一致的，则必存在 S 的一个有限子集 S'，使 S'不一致。

四．回答下述问题（本题共 20 分，每小题 10 分）

1．设某一阶语言 L 中包含个体常元 a_1、函数 f^1_1，f^1_2，f^2_2 及谓词 A_1^2 等，可构造如下通常的算术模型（或算术解释）：令该模型的论域是非负整数集合；令常元 a_1 为数 0；函数 f^1_1，f^1_2，f^2_2 分别解释为后继函数及非负整数的加法函数和乘法函数；谓词 A_1^2 解释为相等关系。根据这一解释：

(1)给出一个一阶公式，使其在通常的算术模型中可满足而不真。

(2)给出一个一阶公式，使其在通常的算术模型中为真而但该公式不是逻辑有效(或普遍有效)。

2．判断下述公式：$(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2) \wedge (\exists x_2)(\forall x_1)\neg A_1^2(x_1,x_2)$，是否可满足和是否逻辑有效，若可满足，构造使之为真的模型；若不逻辑有效，构造使之为假的模型。

五. 按要求解答（本题 20 分，每小题 10 分）

1．求合取范式形式的命题形式，使它逻辑等值于下式：$p \leftrightarrow q$

2．对下列公式，求与之证明上等价的前束范式：

$$((\forall x_1) A_1^2(x_1,x_2) \rightarrow \neg(\exists x_2) A_1^1(x_2)) \rightarrow (\forall x_1)(\forall x_2)A_2^2(x_1,x_2)$$

（余下试题转下页）

（第3页在背面）

六．证明下述结论（本题 14 分）：

证明下述两个命题逻辑的形式系统 S_1 和 S_2 具有相同的定理集合：

形式系统 S_1 的公理组包括如下三条公理模式：

(A1) $A\to(B\to A)$

(A2) $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$

(A3) $((\neg A\to\neg B)\to(B\to A))$

S_1 的推理规则是分离规则：从 A，$A\to B$，可得 B。

形式系统 S_2 的公理组包括如下三条公理模式：

(A1) $A\to(B\to A)$

(A2) $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$

(A3) $(\neg A\to\neg B)\to((\neg A\to B)\to A)$

S_2 的推理规则是分离规则：从 A，$A\to B$，可得 B。

七．证明下述结论（本题 16 分）

设公式集Γ是将命题逻辑系统扩充得到的极大一致公式集合，证明：

(1)对任一公式 A，$\Gamma\vdash A$ 当且仅当 $A\in\Gamma$

(2)公式 $A\to B\in\Gamma$ 当且仅当 $A\notin\Gamma$ 或 $B\in\Gamma$

八．证明下述结论（本题 18 分）

设 A 是任一个一阶公式，若 y 不是公式$\forall xA$ 的自由变元，且 y 对 x 在 A 中代入自由，记 A[y/x]是将 A 中 x 以 y 代入后得到的公式，证明公式$\forall xA\leftrightarrow\forall y A[y/x]$是逻辑有效的公式。