中 山 大 学

二OO六 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：313

科目名称：数学（单考）

考试时间：1 月 15 日 上 午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄原题。

一. 填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 2 0 分。答案写在答题纸上并注明题号。）

1．设由方程 $y^4-\tan x-e^{2x}\ln y=1$ 确定 y 是 x 的隐函数，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ________。

2．非齐次微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}\cos 2x$ 的特解形式应设为 ________。

3．设函数 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})$，其中 f 可微，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________。

4．设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&0&a\\0&a&0\\a&0&1\end{bmatrix}$，则 $A^3=$ ________。

5．设 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{3}{5}$，$P(A|B)=\frac{5}{7}$，则 $P(A+B)=$ ________。

二. 选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 2 0 分。每小题给出的四个选择项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母写在答题纸上并注明题号。）

1. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，则必有结论 [ ]。

（A）$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$

（B）$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=0$

（C）$\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=\infty$

（D）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$

2. 若函数 $f(x)$ 的导函数是 $\cos x+e^{-x}$，则 $f(x)$ 的一个原函数为 [ ]。

（A）$\cos x+e^{-x}$

（B）$-\cos x+e^{-x}$

（C）$\cos x-e^{-x}$

（D）$-\cos x-e^{-x}$

3. 设函数 $z=y+f(y^2-x^2)$，其中 f 可微，则 z 满足方程 [　　]。

（A）$y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$　　（B）$-x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$

（C）$y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$　　（D）$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$

4. 设 X_1，X_2，X_3，X_4 是非齐次线性方程组 $AX=B$ 的解，则下列解的线性组合中是对应齐次线性方程组 $AX=0$ 的解是 [　　]。

（A）$X_1+X_2+X_3+X_4$　　（B）$X_1+X_2+X_3-X_4$

（C）$X_1+X_2-X_3-X_4$　　（D）$X_1-X_2-X_3-X_4$

5. 设袋中装有 5 个红球，3 个白球，现从袋中任取 2 个球，则取出的 2 个球都是白球的概率是 [　　]。

（A）$\dfrac{3}{8}$　　（B）$\dfrac{9}{25}$　　（C）$\dfrac{3}{5}$　　（D）$\dfrac{3}{28}$

三.（本题满分 10 分。）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$ 。

四.（本题满分 10 分）计算 $\int x^2\arctan x\,dx$ 。

五.（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，并且 $f(0)=1$，$f(1)=0$，$0<g(x)<1$，试证明必存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=g(\xi)$ 。

六.（本题满分 10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n}$ 的收敛半径 R 、收敛域以及和函数 $S(x)$ 。

七.（本题满分 10 分）求微分方程 $xy'-y=(x-1)e^x\quad(x>0)$ 的通解 。

八.（本题满分 10 分）计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$ ，其中 D 是由曲线 $y^2=x$，直线 $y=1$，$x=0$ 所围成的平面区域 。

九. （本题满分 12 分）讨论常数 a 、b 取什么值时线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2ax_2 + x_3 = 4 \\ bx_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

有唯一解，无穷多个解，无解，当方程组有无穷多个解时求出方程组的通解 。

十. （本题满分 14 分） 试用正交变换法把二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5{x_1}^2 + 5{x_2}^2 + 2{x_3}^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

化为标准形，写出所用的正交变换矩阵及二次型的标准形 。

十一. （本题满分 12 分） 设随机变量 X 的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} Ax(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 \quad , & \text{其它} \end{cases},$$

1. 确定常数 A 的值，
2. 求 X 的分布函数 $F(x)$，
3. 求 X 的数学期望 EX，方差 DX 。

十二. （本题满分 12 分） 甲袋中装有 1 个红球，5 个白球，乙袋中装有 4 个红球，2 个白球，丙袋中装有 2 个红球，4 个白球。现从中任取 1 个球，设从甲，乙，丙三个袋中取球机会分别是 0.2 ，0.3 ，0.5 ，

1. 求取得的球是红球的概率，
2. 在取得的球是红球的条件下，求该红球是从乙袋中取出的概率。