中 山 大 学

二OO六 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：805

科目名称：数学初试综合考试

考试时间：1 月 15 日 下午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄原题。

（本试卷共包括 6 门科目，每门科目 75 分；考生只需任选其中 2 门作答，满分 150 分；答题超出 2 门科目者，按科目自然排序，只计作答前 2 门科目的得分。）

一、常微分方程（75 分）

(一)、求下列方程的解（每小题 6 分，共 24 分）

1、 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^6-2x^2}{2xy^5+x^2y^2}$ ；

2、 $\dfrac{x^2}{2}+2xe^t+(x+e^t)\dfrac{dx}{dt}=0$；

3、 $\dfrac{dy}{dx}=\cos(x-y)$；

4、 $x=tx'+\dfrac{1}{x'}$ ，这里 $x'=\dfrac{dx}{dt}$。

(二)、 已知 $y=y(x)$ 满足方程 $\dfrac{dy}{dx}+2y=xe^{-x}$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$。 （8 分）

(三)、求微分方程 $x''+4x'+4x=\cos 2t+1$ 的通解，其中 $x'=\dfrac{dx}{dt}$。（15 分）

(四)、试求方程组

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

满足初始条件 $x_1(0)=1, x_2(0)=x_3(0)=0$ 的解，其中 $x_i'=\dfrac{dx_i}{dt}, i=1,2,3$.（15 分）

(五)、简答：方程组 $\dfrac{dx}{dt}=y, \dfrac{dy}{dt}=-x$ 的零解是稳定还是不稳定的？是不是渐进稳定（或者渐进不稳定）的？（5 分）

考试完毕，试题和草稿纸随答题纸一起交回。

(六)、设 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，试证明：方程

$$\frac{dy}{dx}=|y|+g(x)$$

存在唯一的解 $y=\varphi(x)$，定义于区间 $|x-x_0|\le h$，连续且满足初始条件 $\varphi(x_0)=y_0$，其中 (x_0,y_0) 是 xy 平面一点， h 是正常数。（8 分）

二、 数理统计（75 分）

（共 5 道大题，每题 15 分）

1. 母体 X 在 $[0,\theta]$ 上服从均匀分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自母体 X 的样本。
   (1) 求参数 θ 的矩估计和最大似然估计；
   (2) 问它们是否为无偏估计？
   (3) 证明它们均为相合估计。

2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自参数为 λ 的 Poisson 分布 $P(\lambda)$ 的样本。证明：$\overline{X}$ 和 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 都是 λ 的无偏估计；并问是否还有其它无偏估计？

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 是来自 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 的样本；$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是来自母体 $N(\mu_2,\sigma^2)$ 的样本。求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自母体 $N(\mu,1)$ 的样本。试写出检验问题：

$$H_0:\ \ \mu\le\mu_0\ \ \longleftrightarrow H_1:\ \ \mu>\mu_0$$

   （μ_0 已知）的 UMP 检验（检验水平为 α）；并求出检验的功效函数（也称势函数），结果用 $N(0,1)$ 分布的分布函数 $\Phi(x)$ 表示。

5. 线性回归模型

$$y_i=\alpha+\beta x_i+e_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

   其中 e_i 为误差项，$E(e_i)=0$, $Var(e_i)=\sigma^2$，记 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ 分别为 α, β 的最小二乘估计，$\hat{y}_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i$。证明：

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)=0,\quad \sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\hat{y}_i)=0.$$

三、复变函数（75 分）

（一）（10 分）指出下列区域范围并作图表示出来：$0<\arg\dfrac{z+i}{z-i}<\dfrac{\pi}{3}$.

（二）（10 分）设 **f(z)**在$\{|z|<+\infty\}$解析，当|**z**|充分大时，$|f(z)|\le A|z|^n$，其中 **n** 为正整数, **A** 为正常数。 证明 **f(z)**是次数不超过 **n** 的多项式。

（三）（8 分）作出把|**z**|<**1** 变为|**w**|<**1**，并且把 **0** 变为 **0.5i** 的共形映射。

（四）（10 分）计算积分：

$$\int_{|z-3|=2}\frac{e^z}{z(z-2)^3}dz$$

（五）（10 分）设 **f(z)**在区域 **D** 解析，并且$f(z)\neq 0$，证明 **ln|f(z)|**是 **D** 上的调和函数。

（六）（10 分）计算：（1）$i^{(i+1)}$，（2）$\dfrac{i}{(i+1)(i+2)(i+3)}$。

（七）（10 分）求 **f(z)**=$\sqrt{(1-z)(2+z)}$的枝点，并求 **f(z)**的不同单值连续分枝在 **z=2** 的值。

（八）（7 分）设$\{f_n(z)\}$是区域 **D** 上的解析函数列，每个函数$f_n(z)$在 **D** 上没有零点，$f_n(z)$在 **D** 上局部一致收敛于 **f(z)**，则 **f(z)**在 **D** 上或者恒等于 **0**，或者没有零点。

四、抽象代数（75 分）

1，（20 分）设G为一个群，其导出子群为形如$x^{-1}y^{-1}xy, x, y\in G$ 的元素生成的子群，记为G'，

（1）证明：$G'\lhd G$；（2）证明：G/G'是交换群；（3）求S_3'，即 3 次置换群的导出子群。

2，（10 分）证明任何一个有限群都和某次置换群的一个子群同构。

3，（15 分）R 为一环，I 为其一个理想，证明商环 R/I 的理想集（全体理想构成的集合）与 R 的含 I 的理想集一一对应；又设 F 是域，多项式 $f(x)=x(x+1)(x+2)$，求 $F[x]/(f(x))$ 的所有理想。

4，（20 分）设 F 为域，$f(x)$ 为 $F[x]$ 的一个不可约多项式，（1）证明商环 $F[x]/(f(x))$——记为 E，是 F 的代数扩域，扩张次数等于多项式 $f(x)$ 的次数；（2）当 F 为有理数域，$f(x)=x^p-1/x-1$ 时，试描述 E，并求 $Aut_F E$。（注：$Aut_F E=\{g为E的域自同构 \mid g限制在F上是恒等映射\}$。

5，（10 分）实数、有理数域分别记为：R,Q，证明域扩张 $Q\subset R$ 的次数 $[R:Q]$ 无限。

五、计算方法（75 分）

1、（8 分）求二次方程 $x^2-16x+1=0$ 的两根，使其具有三位有效数字。

$(\sqrt{63}\approx 7.94)$

2、（8 分）对某长度测量 n 次得近似值 x_1、x_2 …、x_n。通常取其平均值 $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 作为长度，说明其理由。

3、（8 分）设 A 为 n 阶对称正定矩阵，定义：

$$\|x\|_A=(Ax,\ x)^{1/2},$$

证明 $\|x\|_A$ 可作为 R^n 上向量的一种范数。

4、（8 分）设 A 为 n 阶正交矩阵 B=2I－A.求证线性方程组：$B^TBx=b$ 用 Gauss-Seidel 迭代法求解必收敛。(I 为 n 阶单位矩阵)

5、（14 分）定义内积：$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$，　试在 H=Span{1,x}中寻求

对 $f(x)=\sqrt{x}$ 的最佳平方逼近元 p(x)。

6、（14 分）用牛顿法求 $\sqrt{a}$ (a>0)，　证明当初值 $x_0>0$ 时，由迭代公式产生的序列 $\{x_n\}$ 单调有界,从而迭代法收敛。

7、（15 分）给定 x_0，$x_1\in$[a,b]，$f(x)$ 在[a,b]有三阶连续导数, 证明：

$$f(x)=-\frac{(x-x_1)(x-2x_0+x_1)}{(x_1-x_0)^2}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2}f(x_1)+R(x)$$

这里：

$$R(x)=\frac{1}{6}(x-x_0)^2(x-x_1)f'''(\xi),\quad x_0<\xi<x_1$$

六、数据结构（75 分）

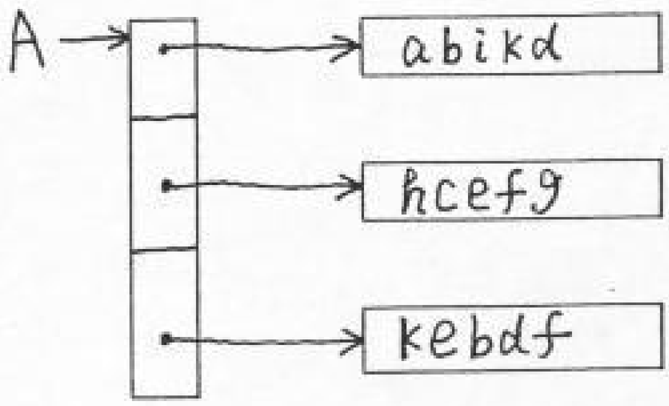
(一) 对比分析题(15 分):

对比分析下列两个对象的各自特点。

1. 数组与链表.
2. 单链表与循环链表.
3. 堆栈与队列

(二) 按要求写出必要的变量定义以及实现代码(给出注解)。(40 分)

1. 试实现下列存储方案:



2. 设要用二叉树实现数的存储：当要插入一个新结点时,从根节点(root)开始"随机地"向左或右走,直到找到空位插入。
3. 要用单链表式堆栈实现对浮点数的存取：试给出堆栈存取有关的各种量的定义，并写出 PUSH 操作的实现代码。
4. 已知非空线性链表（结点类型为 node）的头指针为 list，要删除其第 i 个结点。

(三) 字符串问题：（20 分）

1. 列出可存储字符串的所有可能的存储方案，并以存储字符串"ABDIJG"为例说明。
2. 列出字符串涉及的所有可能的基本操作，简要说明实现的目的和步骤。