中 山 大 学

二00六年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：369

科目名称：数学分析与高等代数

考试时间：1 月 15 日 上 午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄原题。

数学分析

一、（16 分）证明：当 $x \ge 0$ 时，存在 $\theta(x) \in (0,1)$，使得

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

并求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to +\infty}\theta(x)$。

二、（16 分）设 S 为由两条抛物线 $y = x^2 - 1$ 与 $y = -x^2 + 1$ 所围成的闭区域，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 在 S 内，试确定 a,b（$a,b > 0$）使椭圆面积最大。

三、（16 分）判别下列级数和广义积分的收敛性，条件收敛还是绝对收敛

（1）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}}$　　（2）$\displaystyle\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]dx$

四、（16 分）求 $I = \displaystyle\iint_{\Sigma}(x^3 + y^3)dydz + (x^3 + x^2 y)dzdx + (1+y)dxdy$，

其中 Σ 是单叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 在 $0 \le z \le \sqrt{3}$ 的部分，取外侧。

五、（16 分）设函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 满足：

（1）$\{\varphi_n(x)\}$ 是 $[-1,1]$ 上的可积函数列，且在 $[-1,1]$ 一致有界；

（2）任意 $c \in (0,1)$，$\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[-1,-c]$ 和 $[c,1]$ 一致收敛于零。

证明：对任意 $[-1,1]$ 上的连续函数 $f(x)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}[f(x) - f(0)]\varphi_n(x)dx = 0$$

高等代数试题

一、(10 分) λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=1, \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=2, \\ 4x_1-8x_2+3x_3+\ \ x_4=\lambda. \end{cases}$$

有解？当方程组有解时，试求其通解。

二、(10 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是实数域上三维向量空间 V 的一组基，

$$\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,\ \beta_2=-\alpha_2,\ \beta_3=2\alpha_2+\alpha_3。$$

证明：β_1,β_2,β_3 也是 V 的一组基，并求 V 中在这两组基下坐标相同的所有向量。

三、(15 分) 设 R^4 中 $\alpha_1=(1,2,1,0),\alpha_2=(-1,1,1,1),\alpha_3=(0,3,2,1)$ 生成的子空间为 V_1，$\beta_1=(2,-1,0,1),\beta_2=(1,-1,3,7)$ 生成的子空间为 V_2。分别求 V_1+V_2，$V_1\cap V_2$ 的一组基。

四、(15 分) 设 A,B 都是 n 阶正定实对称方阵，证明：

（1）AB 正定的充要条件是 $AB=BA$；

（2）如果 $A-B$ 正定则 $B^{-1}-A^{-1}$ 亦正定。

五、(10 分) 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，其中 a,b,c,d 是实数，且 $ad-bc=1$。证明：如果 $|a+d|<2$，则存在实数 θ 和实可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$。

六、(10 分) 设 A,B 是两个可换的实方阵，且存在自然数 k 使 $A^k=0$。证明：$|A+B|=|B|$。