

中山大学

二〇〇六年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 330

科目名称: 一元微积分

考试时间: 1月15日上午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上, 答在试题纸上的不得分! 请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号, 不必抄原题。

一. 判断题: (正确的在答题纸上写“T”, 错误的写“F”。每小题5分, 共25分)

1. 若 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 则 $f(x)$ 在 x_0 点可导. ()

2. 若 $f(x)$ 在 x_0 点可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 点可微. 反之亦真. ()

3. A 是一个非空数集. 若 $\forall b \in \mathbb{R}$ (实数集), $\exists x_0 \in A$, 有 $b < x_0$.
则数集 A 无上界. ()

4. 若 $f(x)$ 在 x_0 点左、右极限均存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 点极限存在. ()

5. 已知 $f(x), g(x)$ 在实数集 \mathbb{R} 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$,
并且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = a$ (存在), 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$. ()

二. 填空题: (每小题5分, 共25分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x =$ _____.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt =$ _____.

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ A+2, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 \mathbb{R} 上连续, 则 $A =$ _____.

4. $\left(\int_x^b f(t) dt \right)' =$ _____.

5. 给出极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ 的 ε - δ 定义: _____.

(第2项在背面)

三. 计算题: (每小题 15 分, 共 45 分)

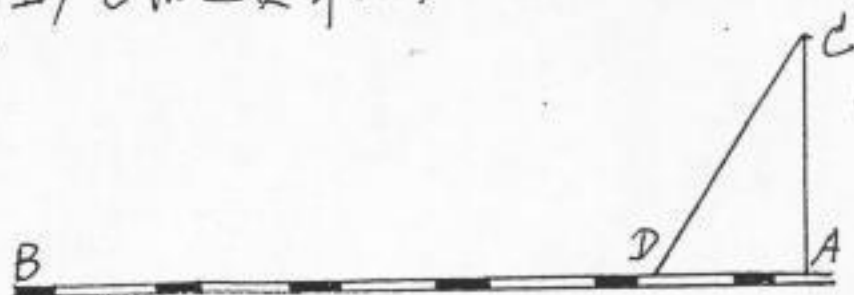
1. 应用罗毕达法则求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin x}$

2. 求不定积分: $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

3. 求定积分: $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

四. 应用题: (20 分)

铁路线上 AB 直线段长 100 km, 工厂 C 到铁路线上 A 处的垂直距离 CA 为 20 km. 现在要在 AB 上选一点 D, 从 D 向 C 修一条直线公路. 已知铁路运输每吨公里与公路运输每吨公里的运费之比为 3:5. 为了使原料从 B 处运到工厂 C 的运费最省, D 应选在何处?



五. 证明题: (1, 2 小题每题 10 分, 3 小题 15 分, 共 35 分)

1. 证明: 对任意实数 a , 方程 $x^3 - 3x + a = 0$ 不可能存在两个小于 1 的相异正实根。

2. 证明: 当 $x > 0$ 时, $x > \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$.

3. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 非负, 且 $\exists x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) > 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx > 0$.