中 山 大 学

二00七年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：441

科目名称：高等代数

考试时间：1 月 21 日 下 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

1．（15 分）试求一个 9 次多项式 $f(x)$，使得 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^5$ 整除，而且 $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^5$ 整除。

2．（15 分）由向量 $\alpha_1=(1,\ 1,\ -2,\ 1)$，$\alpha_2=(3,\ 1,\ -4,\ 1)$，$\alpha_3=(-1,\ 1,\ 0,\ 1)$ 生成的 $\mathbf{R}^4$ 的子空间记为 W。求一个齐次线性方程组，使它的解空间为 W。

3．（15 分）设 $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$。求 A^{100}。

4．（20 分）设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}$ 互不相同， 令 $f_i(x)=\prod_{j\neq i}(x-a_j)$，$i=1,2,\cdots,n$。

1）证明：$f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 $\mathbf{R}[x]_n$ 的一组基；

2）求由基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 到基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 的过渡矩阵；

3）求基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的对偶基。

5．（20 分）在线性空间 $\mathbf{R}^2$ 中，定义

$$(x,y)=xAy',\quad \forall\, x=(x_1,x_2),\quad y=(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2,$$

其中 $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 6\end{pmatrix}$。

1）证明：(x,y) 是 $\mathbf{R}^2$ 的内积， 因而 $\mathbf{R}^2$ 按此内积作成一个欧氏空间；

2）求 $\mathbf{R}^2$ 的一组标准正交基；

3）求矩阵 P，使得 $A=P'P$。

考试完毕，试题和草稿纸随答题纸一起交回。

6.（20 分）设$\mathbf{R}^4$的线性变换$\mathbf{A}$在标准基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1）求$\mathbf{A}$的特征值和特征向量；

2）求$\mathbf{R}^4$的一组标准正交基，使$\mathbf{A}$在此基下的矩阵为对角矩阵。

7.（15 分）设A是一个$n\times n$实对称矩阵，λ是A的最大特征值。证明：

$$\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \le \lambda .$$

8.（15 分）设V是数域F上一个n维线性空间， $\mathbf{A}$是V上的线性变换。证明：若$\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$， 则$V=\mathbf{A}^{-1}(0)\oplus \mathbf{A}V$。

9.（15 分）设V是数域F上n维线性空间， $\mathbf{A}$是V上的线性变换，而且，存在向量$\xi\in V$ 使$V=L(\xi,\mathbf{A}\xi,\cdots,\mathbf{A}^{n-1}\xi)$。证明： 对于$V$上任意线性变换$\mathbf{B}$，$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$的充分必要条件是存在多项式$f(x)$使$\mathbf{B}=f(\mathbf{A})$。