# 中 山 大 学

## 二00七年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：750

科目名称：高等数学(A)

考试时间：1 月 21 日 上 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

本卷共九大题，满分为 150 分。

一、完成下列各题：（每小题 7 分，共 28 分。）

1、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$。

2、$y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$，求 $y'$。

3、计算积分：$I=\int_1^2 dy\int_y^2\frac{\sin x}{x-1}dx$。

4、若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，求证：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，

使得 $$\int_a^\xi f(t)dt=\int_\xi^b\frac{1}{f(t)}dt$$ 。

二、完成下列各题：（每小题 8 分，共 32 分。）

1．若 $f(t)$ 在 $R$ 上连续，且 $f(0)=1$，记 $\Omega_t=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le t^2，0\le z\le t\}$，$F(t)=\iiint\limits_{\Omega_t}z^2f(x^2+y^2)dxdydz$，求 $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^5}$。

考试完毕，试题和草稿纸随答题纸一起交回。

2. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$ 且对任意 $x\ge 1$ 有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$ ，

求证：对任意 $x\ge 1$ 有 $f(x)<1+\dfrac{\pi}{4}$ 。

3. 求解一阶常微分方程的初值问题：$xy'+3y=5x^2$ ， $y(1)=2$ 。

4. 设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是线性齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，而向量 $\beta$ 并非如上方程组的解，求证：向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_m$ 必定线性无关。

三、(每小题 9 分，共 18 分。)

1. 设 $a_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,dx$ ，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的和，并证明对任意常数 $\lambda>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛。

2. 求函数 $\ln(1+x-2x^2)$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式，并指出收敛域。

四、(12 分) 设函数 $y=y(x)$ 满足二阶常微分方程 $xy''-3x(y')^2=1-e^x$ ，求证：若 $y=y(x)$ 在点 $x=x_0$ 取极值，则 $y(x_0)$ 必是极大值。

五、(12 分) 求二阶常微分方程：$y''-4y'+3y=1+e^{2x}$ 的通解。

六、（12 分）设三阶实对称矩阵 $A$ 的三个特征根分别是 $-1$，1，1，且矩阵 $A$ 属于特征根 $-1$ 的特征向量为 $\alpha_1=(0,1,1)^T$。求矩阵 $A$ 属于特征根 1 的特征向量及矩阵 $A$。

七、（12 分）设三阶非零矩阵 $B$ 的每个列向量都是如下线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

的解，求 $\lambda$ 的值并证明矩阵 $B$ 的行列式 $|B|=0$。

八、（12 分）若函数 $f(x)$ 在 $R$ 上一阶连续可微，$l$ 是上半平面起点为 $A(1,2)$，终点为 $B(2,1)$ 的分段光滑曲线，记

$$I=\int_l \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy，$$

证明如上曲线积分与路径无关，并求此曲线积分。

九、（12 分）计算曲面积分

$$I=\iint_{S^+}(x^2-z)dxdy+(z^2-y^2)dzdx，$$

其中 $S^+$ 为曲面 $z=1-x^2-y^2$，界于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间，取上侧。