中 山 大 学

二OO七 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：751

科目名称：高等数学(B)

考试时间：1 月21日 上 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

一、填空题（本题共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分；答案写在答题纸上并注明题号。）

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=$______.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=$______.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x}\sin t^2dt}{\sin^2 x}=$______.

4. $\int_{-1}^{1}\frac{4^x-1}{2^x}dx=$______.

5. $\int\frac{\sin x dx}{\sin x+2\cos x}=$______.

6. 设 $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$，则 $\frac{dy}{dx}=$______.

7. 设 $\Omega=\left\{(x,y,z):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega}x^2dv=$______.

8. 直线 $\begin{cases}2x+y-z+1=0\\x+2y+z+3=0\end{cases}$ 的方向向量是______.

9. 微分方程 $y'-xy=x$ 的通解是______.

10. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(1,1^2)$，则随机变量函数 e^{tX} 的期望= ________，其中参数 $t\in$ ¡ .

11. 设总体 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{b} & 1\le x\le b\\ 0 & otherwise\end{cases}$，则参数 $a=$ ________(用参数 b 表示)；若 2,3,4,5,6,7,8,9,11 为来自 X 的简单随机样本，则参数 b 的矩估计为 ________。

12. 设总体 X 服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布，而 $x_1,x_2,\mathrm{L}\,,x_n$ 为来自该总体的简单随机样本，则似然函数的表达式为 ________________；参数 λ 的最大似然估计为________。

二、(本题满分 10 分) 设 $u=\dfrac{x^2}{y}+xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中函数 f 二阶可导，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

三、(本题满分 10 分) 设函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导，试证明：曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是"向上凸"的如下两个定义等价：

1) $f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，任意 $x_0,x\in(a,b),x\ne x_0$；

2) $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，任意 $x_1,x_2\in(a,b),x_1\ne x_2$.

四、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 是一个以 T 为周期的连续函数，$f(x_0)<0$ 且 $\int_0^T f(x)dx>0$；试证明：函数 $f(x)$ 在 (x_0,x_0+T) 内至少有两个零点。

五、（本题满分 10 分）一质点在椭球面$(x-2)^2+(y-3)^2+\dfrac{z^2}{2}=1$上运动，求该点到平面$y-x+2=0$的距离的最小值，并给出此时该点的坐标。

六、（本题满分 12 分）设总体X近似服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，而13.4,20.9,25.1,29.7,46.9为来自该总体的简单随机样本，而参数μ,σ都未知：求参数μ的置信度为95%的置信区间；针对零假设$H_0:\sigma=8$与备择假设$H_1:\sigma>8$作显著性水平为5%的假设检验。(其中，标准正态分布的2.5%与5%上侧分位数分别为1.96与1.65，自由度为4的t分布的2.5%与5%上侧分位数分别为2.78与2.132，自由度为4的χ^2分布的5%与10%上侧分位数分别为9.49与7.78)

七、（本题满分 12 分）设随机变量X服从参数为$\lambda>0$的Poisson分布，求随机变量函数$Y=e^{tX}$的期望，其中参数$t\in$¡ 。

八、（本题满分 12 分）求二重积分$\iint\limits_D\left(\dfrac{2y}{3}-x^2\right)d\sigma$，其中平面区域$D$为满足$x^2+(y-1)^2\le 1$和$y\ge 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$的部分。

九、（本题满分 14 分）求微分方程$y''-3y'+2y=2x+5\cos x$的通解。