中 山 大 学

二00七年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：752

科目名称：数学分析

考试时间：1 月 21 日上午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄原题。

一、（每小题 6 分，共 36 分）计算

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$；

（2）$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{1-e^{\sqrt{x}}}$；

（4）$\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{\cos\frac{1}{x}})^{x^2}$；

（5）设 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{-xy}-2z+e^z=0$ 确定，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$；

（6）求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在 $(1,1,1)$ 点处的切平面方程。

二、（每小题 6 分，共 24 分）判别下列级数或广义积分的收敛性，条件收敛还是绝对收敛。

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\ln n)^2}{(\ln 3)^n}$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{\pi}{2n^2}+\sin\frac{\pi}{n})$；

（3）$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx$；

（4）$\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)^2}dx$。

三、（14 分）求平面曲线 $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ 上对应于 $t=t_0$ 点的法线方程，并讨论曲线在 $t\in(0,\pi)$ 一段的凹凸性。

四、（18 分）讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在 $P_0(0,0)$ 点处

（1）连续性；

（2）可微性；

（3）沿 $\vec{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数的存在性。

五、(14 分) 计算曲线积分 $\oint_c xyzdy$，其中曲线 $c:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ y=z\end{cases}$，其方向与 z 轴构成右手系。

六、(18 分) 对幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}x^{2n}$

(1) 求收敛域；

(2) 求和函数；

(3) 讨论幂级数在收敛域上的一致收敛性。

七、(每小题 8 分，共 16 分) 在 Oxy 平面上，光滑曲线 L 过 $(1,0)$ 点，并且曲线 L 上任意一点 $P(x,y)(x\neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax ($a>0$ 为常数)。

(1) 求曲线 L 的方程；

(2) 如果 L 与直线 $y=ax$ 所围成的平面图形的面积为 8，确定 a 的值。

八、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，令

$$f_n(t)=\int_0^t f(x^n)dx,\quad t\in[0,1],\quad n=1,2,\cdots$$

证明函数列 $\{f_n(t)\}$ 在 $[0,1]$ 一致收敛于函数 $g(t)=tf(0)$。