中 山 大 学

二00八年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：634

科目名称：高等数学（A）

考试时间： 1 月 20 日 上午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

一.完成下列各题: (每小题 7 分， 共 28 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0+}(\cos\sqrt{x})^{1/x}$

2. 设 $\begin{cases} x=\arctan t \\ t\sin y+y=1 \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

3. 设 $a,b,c>0$，求 $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}$ 在平面 $x+y+z=1$ 上的最小值

4. 已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\sin x}e^{-t^2}dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同，求此切线方程并求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} nf(\dfrac{3}{n})$

二.完成下列各题: (每小题 8 分， 共 32 分)

1. 设 2 阶方阵 A 的特征多项式为 $f_A(x)=x^2-1$，求 $B=A^3+2A-I_2$ 的特征多项式 $f_B(x)$，其中 I_2 为 2 阶单位矩阵

2. 计算曲线积分 $I=\int_L xds$，L 为双纽线 $\rho^2=\cos 2\theta$，$\theta\in[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}]$

3. 设曲面 S 为 $x^2+y^2+(z-1)^2=r^2$ 的外侧，$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上连续，$f(0)=h\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{r\to 0+}\dfrac{1}{r^3}(\iint_S xf(yz)dydz+yf(zx)dzdx+zf(xy)dxdy)$

4. 求微分方程 $y'=\dfrac{1}{2}\tan^2(x+2y)$ 的通解

考试完毕，试题和草稿纸随答题纸一起交回。

三.(每小题 9 分， 共 18 分)

1. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，将$f(x)$在$x=0$处展开成幂级数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$的和

2. 设$u_n>0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n}=1$，证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}})$条件收敛

四（11 分）设$f(x):[0,1]\to R$连续可导，证明：$\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\le\int_0^1(|f(t)|+|f'(t)|)dt$

五.（11 分）设$a_1<1$，$(2-a_n)a_{n+1}=1$，$n\in N$，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$存在并求此极限

六.（12 分）求方程$y'''-4y''+4y'=24x^2+4e^{2x}$的通解

七.（12 分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

1. 存在$a\in(0,1)$使$f(a)=1-a$
2. 存在两个不同的点$b,c\in(0,1)$使$f'(b)f'(c)=1$

八.（13 分）已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2\end{cases}$$

（1）a,b为何值时，方程组有解？

（2）方程组有解时，求出全部解

九.（13 分）设A,B为n阶方阵，I_n为n阶单位矩阵，$A,B,AB-I_n$都可逆

1. 证明$A-B^{-1}$可逆并求$(A-B^{-1})^{-1}$

2. 证明$(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$可逆并求$[(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1}$