中 山 大 学

二00八年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码： 642

科目名称： 数学分析与高等代数

考试时间： 1 月 20 日 上 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

数学分析(150 分)

一、(每小题 15 分，共 60 分) 求解下列各题：

(1) 若 $f(x)=2nx(1-x)^n$，记 $M_n=\max\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n$.

(2) 设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$，且 $y=y(x,z)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2=3xy$ 确定的隐函数，求 $f'_x(0,2,1)$.

(3) 求 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^x \sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^2 \sin\frac{\pi x}{2y}dy$.

(4) 求 $I=\iint\limits_S (x^3+z^2)dydz+(y^3+x^2)dzdx+(z^3+y^2)dxdy$，其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，上侧为正.

二、(18 分)已知 $f(x,y)=(x-6)(y+8)$，求 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的最大方向导数 $g(x,y)$，并求 $g(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 25\}$ 上的最大、最小值.

三、(每小题 18 分，共 36 分) 证明下列各题：

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时趋于 0，用极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上具有二阶导数，且 $|f''(x)|\le M$，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值. 试证 $|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma$.

四、((1)题 16 分，(2)题 20 分，共 36 分) 判定下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\int_n^{n+1}\frac{\sin\pi x}{x^p+1}dx\right|$，其中 $p>1$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{\sin\pi x}{x^p+1}dx$，其中 $0<p\le 1$.

高等代数(150 分)

1. (10 分) 设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$，证明 $A+2E$ 可逆，并求 $(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^{-1}$.

2. (10 分) 判别二次型 $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 的正定性.

3. (10 分) 若 f(x)、g(x) 互素，且 f(x) 整除 g(x)h(x)，证明 f(x) 整除 h(x).

4. (15 分) 证明：若 n 维向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是一组两两正交的非零向量，则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关.

5. 设 A 是 n 阶可逆矩阵($n\geqslant 2$)，证明：$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.(15 分)

6. (15 分) 已知 n 方阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,

   求 A 中所有元素的代数余子式之和 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}$.

7. (15 分) 设 n ($n\geqslant 3$)阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

   若矩阵 A 的秩为 $n-1$，求 a 的值.

8. (20 分) 证明：设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 A 的 m 个特征值，$p_1,p_2,\cdots,p_m$ 依次是与之对应的特征向量. 如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 各不相等，则 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 线性无关

9. (20 分) 计算 n 阶行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ -1 & 1-\alpha & \alpha & 0 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\alpha & \alpha & \cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 1-\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots -1 & 1-\alpha \end{vmatrix}$$

10. (20 分) 试求一个正交的相似变换矩阵,将下列对称矩阵化为对角矩阵:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$