中 山 大 学

二00九年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：870

科目名称：高等代数

考试时间： 1 月 11 日 下 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

1（10分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}$。

2（20分）证明：

1）对任意矩阵 A，矩阵方程 $AXA=A$ 都有解；

2）如果矩阵方程 $AY=C$ 和 $ZB=C$ 有解，则方程 $AXB=C$ 有解。

3（20分）设 $f:R^2\to R$ 是线性映射。

1）证明：存在 $a,b\in R$ 使得对任意 $(x,y)\in R^2$ 有 $f(x,y)=ax+by$；

2）已知 $f(1,1)=3$，$f(1,0)=4$，求 $f(2,1)$。

4（15分）设 V 是 F 上 n 维线性空间， f 是 V 上的一个非零线性函数。证明：存在 V 的一个基（$e_1,e_2,\cdots,e_n$），使得对任意向量 $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in V$，有 $f(x)=x_1$。

5（15分）求一个次数最低的多项式 $f(x)\in F[x]$，使得它被 $(x-1)^2$ 除所得余式为 $2x$，而被 $(x-2)^3$ 除余式为 $3x$。

6（15 分）设 $f(x)\in F[x]$ 是一个次数大于零的多项式。证明：$f(x)$ 不可约的充分必要条件是：由“$f(x)$ 整除两个多项式的乘积”可推出“$f(x)$ 必整除其中的一个”。

7（15 分）求复矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ 的若当标准形及最小多项式。

8（10 分）证明：n 元实二次型 $q(X)=X^TAX$ 是半正定的当且仅当矩阵 A 的任意主子式非负。

9（10 分）设 σ 是 n 维欧氏空间 V 上的一个对称变换。证明：σ 的核 $\ker\sigma$ 的正交补等于 σ 的象 $im\sigma$。

10（20 分）设实矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$。

1） 求正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵；

2） 求正交矩阵 Q 及上三角矩阵 R 使 $A=QR$。

注：试卷中 F 为一数域，R 表示实数域，I 表示单位矩阵。