中 山 大 学

二00九 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：651

科目名称：线性代数

考试时间：1 月 11 日 上 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

1. (10 分) 若 $(x-1)^2 \mid ax^4+bx^2+1$. 求 a, b 的值.

2. (10 分) 计算 n 阶行列式: $\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

3. (15 分) 解方程组

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3+x_4=a, \\ x_1+ax_2+x_3+x_4=a, \\ x_1+x_2+ax_3+x_4=a, \\ x_1+x_2+x_3+ax_4=a. \end{cases}$$

4. (10 分) 设方阵 A 满足方程 $A^2-3A-10E=0$,这里 E 为单位矩阵. 证明: A , $A-4E$ 都可逆并求它们的逆矩阵.

5. (10 分) 证明:若 A 为实对称方阵,且 $A^2=0$，则 $A=0$.

6. (20 分) R 是实数域， $R^2=\{(a,b)\mid a,b\in R\}$. $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ 是 R^2 的两个基, 其中 $\varepsilon_1=(1,0)$, $\varepsilon_2=(2,1)$, $\alpha_1=(1,1)$, $\alpha_2=(0,1)$. σ 是 R^2 上线性变换且 $\sigma(\varepsilon_1)=\alpha_1$, $\sigma(\varepsilon_2)=\alpha_2$.（1）求由 ε 到 α 的过渡矩阵 C ;（2）分别写出 σ 在基 ε 下的矩阵 A 和 σ 在基 α 下的矩阵 B .

7. (10 分) 设 $\sigma: V\to W$ 是线性映射. 记 $\operatorname{Im}\sigma=\{\sigma(x): x\in V\}$， $Ker\sigma=\{x\in V:\sigma(x)=0\}$. 证明: 若 V 是有限维空间, 则 $\dim Ker\sigma=\dim V-\dim\operatorname{Im}\sigma$.

8. (25 分) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.（1）求 A 的特征值和特征向量;（2）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵;（3）求 A^{100}.

9. (20 分) 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.（1）用正交变换化二次型 $q(X)=X^T AX$ 为标准型, 并说明 $q(X)=1$ 表示什么曲面;（2）求正定矩阵 P，使 $A=P^2$.

10. (20 分) 设 V 为欧氏空间, α 为 V 中一个向量. 证明:（1） $f(x)=(x,\alpha)$ 是 V 的一个线性函数;（2）若 $\alpha\neq\beta$ 且 $g(x)=(x,\beta)$，则 $f(x)\neq g(x)$;（3）对 V 的任一个线性函数 $f(x)$，都存在一个向量 γ 使得 $f(x)=(x,\gamma)$.