# 中 山 大 学

## 二00九年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：650

科目名称：数学分析

考试时间： 1 月 11 日 上午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

一、（每小题 6 分，共 48 分）

（1）求 $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x}))$；

（2）$\begin{cases} x=\cos(t^2) \\ y=\int_0^{t^2}\frac{\sin u}{u}du \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$；

（3）求 $\int\frac{1-\ln x}{\ln^2 x}dx$；

（4）求 $\int_{-1}^{1}|x-a|e^x dx$，$|a|<1$；

（5）设 $z=uv+\sin t$，$u=e^t$，$v=\cos t$，求 $\frac{dz}{dt}$；

（6）设 $u=\varphi(x+\psi(y))$，其中 $\varphi,\psi$ 二阶可微，$x,y$ 为自变量，求 $d^2u$；

（7）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos^n x$ 在收敛域上的和函数；

（8）判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 的敛散性。

二、（12 分）将区间 $[1,2]$ 作 $n$ 等分，分点为 $1=x_0<x_1<\cdots<x_n=2$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$。

三、（16 分）计算 $I=\int_\ell\frac{(x+y)dx+(y-x)dy}{x^2+y^2}$，其中 $\ell$ 是从点 $A(-1,0)$ 到点 $B(1,0)$ 的一条不通过原点的光滑曲线：$y=f(x), x\in[-1,1]$，且当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)>0$.

四、（16 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 $\Sigma$ 为曲面 $x^2+y^2=z^2$ 介于平面 $z=0$ 和 $z=h\,(h>0)$ 之间的部分取下侧。

五、（16 分）设 $f(x)$ 在 $[1,\infty)$ 连续，$f''(x)\le 0$，$f(1)=2$，$f'(1)=-3$。证明 $f(x)=0$ 在 $(1,\infty)$ 有且仅有一个实根。

六、(16 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 连续，试证：对一切 $x$ 满足 $f(2x)=f(x)e^x$ 的充要条件是 $f(x)=f(0)e^x$。

七、(16 分) 求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在第一卦限部分的切平面与三坐标平面围成的四面体的最小体积。

八、(10 分) 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\ln n)}{n}$ 的敛散性。