中 山 大 学

二00九年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码： 363

科目名称： 数学 (A)

考试时间： 1 月 11 日 上午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

一 (28 分，每小题 7 分) 设 $F(x)=e^x$。证明：

(1) $\dfrac{F(x)}{F(y)}=F(x-y)$；

(2) $\lim_{x\to-\infty} xF(x)=0$；

(3) $\ln\left(F(x)^{F(x)}\right)=\dfrac{d[xF(x)]}{dx}-F(x)$；

(4) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格单调递增的。

二 (32 分， 每小题 16 分) 计算：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3+x^2}-\sqrt{3}}{x}$；

(2) $\displaystyle\int_1^3\frac{\sqrt{3+x^2}-\sqrt{3}}{x^{-1}}\,dx$。

三 (45 分， 每小题 15 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ ， $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&1&2\end{pmatrix}$

（1） 计算：$A+B,\ AB$

（2） 求 $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}$

（3） 解方程组 $AX=0$, $AY=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

考试完毕，试题和草稿纸随答题纸一起交回。

四（15 分）、一批产品，每箱装 20 件，已知每箱不含次品的概率为 80%，含一件次品的概率为 20%。在购买时，随意选一箱，从中随意逐个选出产品进行检查，如果发现次品就退回，如果检查 2 个还未发现次品就买下。

试求：（1）顾客买下这箱产品的概率 α；

（2）在顾客买下的一箱中，确实没有次品的概率 β。

五（15 分）、已知连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 为

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

又知 $EX=0.5, DX=0.15$，

（1） 求 a, b, c 的值；

（2） 求 $P(0\le X\le 0.5)$

六（15 分）、设总体 X 的期望为 μ、方差为 σ^2，分别抽取容量为 n_1,n_2 的两个独立样本，$\overline{X}_1,\overline{X}_2$ 为两个样本的均值。试证：如果常数 a,b 满足 $a+b=1$，则 $Y=a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$ 是 μ 的无偏估计量，并确定 a,b 的值，使得 DY 最小。