中 山 大 学

二〇一〇年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码： 361

科目名称： 高等数学（B）

考试时间： 1 月 10 日 上 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

一. 填空题（每小题 5 分，共 60 分；答案写在答题纸上并注明题号.）

1. 函数 $y=\ln(\tan(x))$ 的定义域为____________，其导数 $\frac{dy}{dx}=$____________.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^x=$________________.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=$______________________.

4. 二元函数 $z=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 处_________（选填连续或不连续），两个偏导数分别为 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=0,y=0}=$_________， $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=0,y=0}=$_________.

5. 设函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=\ln(x)$ 且 $f(2)=1$ ，则 $y=\ln|f(x)|$ 在 $x=2$ 处的二阶导数等于______________________.

6. 在方程 $e^{xy}+x+y=0$ 中将 y 看作 x 的函数，则 $\frac{dy}{dx}=$____________.

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}=$________________________.

8. 设 D 表示横轴及曲线 $y=\ln(x)$ 在 $x=1$ 及 $x=e$ 之间所围成的区域，则二重积分 $\iint\limits_D xe^y\,dxdy=$____________.

9. 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$ 的收敛半径为____________，其和函数为______________.

10. 若随机向量 (X,Y) 服从以横轴、直线 $y=x$ 与 $x=2$ 所围成的三角形区域上的均匀分布，则期望 $E(X)=$________，$E(Y)=$________，$E(XY)=$________；协方差 $\mathrm{cov}(X,Y)=$________.

11. 若随机变量 X 与 Y 相互独立且服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的期望为 $E(Z)=$________，方差为 $D(Z)=$________.

12. 考虑两枚均匀骰子，将它们同时抛掷一次，得到的点数分别记作 X 与 Y ，则 $Z=X+Y$ 的期望为 $E(Z)=$________，方差为 $D(Z)=$________.

二.（本题满分 12 分）证明函数$u=\varphi(x-ay)+\psi(x+ay)$满足方程$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，其中，$\varphi$和$\psi$均为二阶可微函数，$a$为常数.

三.（本题满分 12 分）设函数$F(x)$在$[a,b]$上连续，且$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt$，其中$f(x)>0$，试证$F'(x)\geq 2$且$F(x)$在$[a,b]$上有且仅有一个实根.

四.（本题满分 14 分）判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{n}\right)$的绝对收敛、条件收敛或发散性.

五.（本题满分 14 分）求方程$\frac{dy}{dx}=\frac{5x-3y}{5y-3x}$的通解及其当$x=1$时$y=0$的特解.

六.（本题满分 12 分）设D是以点$O(0,0)$、$A(1,2)$和$B(2,1)$为顶点的三角形区域，求$\iint_D xdxdy$.

七.（本题满分 12 分） 一轮胎制造商针对某种型号轮胎的生产作出了新的工艺改进，由此生产的轮胎的平均使用寿命需要跟旧工艺生产的轮胎比较. 该制造商随机选定了20辆小汽车，编号为$1,2,3,\cdots,20$. 试验室的工作人员先在每辆车后轮(制动轮)上安装新工艺生产的轮胎，然后由专业车手在跑道上驾车直到其中一个后轮胎被磨破，分别记下其驾驶里程$x_1,x_2,\cdots,x_{20}$(英里). 之后，在每辆车的后轮安装旧工艺生产的轮胎，以同样的方式在跑道上行驶，直到其中一个后轮胎被磨破，分别记下其驾驶里程$y_1,y_2,\cdots,y_{20}$(英里). 对第i辆车而言，将两种工艺生产的轮胎的使用寿命之差记作$x_i-y_i=d_i$. 已知$d_1,d_2,\cdots,d_{20}$的平均值为$\bar{d}=4.55$，$S_d=\sqrt{\frac{1}{19}\sum_{k=1}^{20}(d_k-\bar{d})^2}=7.22$，试在显著性水平为5%的情况下判断新工艺是否显著延长了轮胎的使用寿命. 这里，自由度为19的t分布的0.05上侧分位数为$t_{0.05,19}=1.729$.

八.（本题满分 14 分）假设$x_1,x_2,\cdots,x_{50}$为来自一正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，参数μ与σ^2未知.

(1) 求参数μ与σ^2的最大似然估计量(要求给出似然函数)；

(2) 若已知样本平均$\bar{x}=14.75$，样本方差$S^2=\frac{1}{49}\sum_{k=1}^{50}(x_k-\bar{x})^2=66.90$，($S=\sqrt{S^2}\approx 8.18$)，则求参数$\mu$的95%置信区间，这里，自由度为49 的$t$分布的0.025 上侧分位数为$t_{0.025,49}=2.009$；

(3) 若以(2)中样本数据考虑零假设$H_0:\mu=12$与备择假设$H_1:\mu\neq 12$对应的假设检验问题，问是否会在显著性水平为5%的情况下拒绝H_0？为什么？