中　山　大　学

二〇一〇年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：　610

科目名称：　一元微积分

考试时间：　1　月　10　日　上　午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

（一）　填空题（每小题 5 分，共 30 分）请将答案写在答题纸上，并表明题号。

（1）"f(x)在 x_0 点不以 A 为极限"用 $\varepsilon-\delta$ 定义可表述为( ).

(2) y=$\sqrt{1-x^2}$ 的导数为( )

(3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$ =( )

(4) $f(x)=x^2+\dfrac{432}{x}$ 的极小值为( )

(5) y=x+$\dfrac{1}{x}$ 的值域为( )

(6) y=$e^{\sin(ax+b)}$ 的微分为()

（二）　判断题（正确的写"T"，错误的写"F"。每小题 5 分，共 30 分）请将答案写在答题纸上，并表明题号。

(1) 映射 f 在其值域中任意一点的逆像 $f^{-1}(y)$ 是惟一的. ()

(2) 函数 f(x)= $\begin{cases} 1, x \text{ 为有理数}, \\ 0, x \text{ 为无理数}. \end{cases}$ 在[0, 1]上是 Riemann 可积的. ()

(3)单调有界数列必收敛. ()

(4)有限开区间(a, b)的连续函数 f(x)在这个区间上一致连续. ()

(5)开区间 I 上的可微函数 $f(x)$ 在 I 严格单调增加的充分必要条件是 $f'(x)>0, x\in I$. ()

(6)闭区间上的连续函数必可积. ()

（三） 选择题（每小题 **5** 分，共 **20** 分）。请将答案写在答题纸上，并表明题号。

(1) 设 $g(x)=\begin{cases}2-x & x\le 0\\ 2+x & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x & x\ge 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]=$

(A) $\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2-x & x\ge 0\end{cases}$，　(B) $\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2+x & x\ge 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2-x & x\ge 0\end{cases}$，　(D) $\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2+x & x\ge 0\end{cases}$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为偶函数，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$，则（　　）

(A) $\Phi(x)$ 是奇函数；　(B) $\Phi(x)$ 是偶函数；

(C) $\Phi(x)$ 是非奇非偶函数；　(D) $\Phi(x)$ 可能是奇函数，也可能是偶函数

(3) 设 $x_n=n\cos\frac{n\pi}{2}$，则数列 $\{x_n\}$ 是　　（　　）

(A) 收敛列；　(B) 无穷大；

(C) 发散的有界列；　(D) 无界但不是无穷大

(4) 函数 $f(x)$ 在点 a 存在极限是 $f(x)$ 在点 a 连续的（　　）

(A) 充分必要条件　；　(B)充分条件；

(C) 必要条件；　(D) 既非充分条件亦非必要条件

（四） 计算题（每小题 **10** 分，共 **40** 分）请将答案写在答题纸上，并表明题号。

(1)求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$.

(2)求 $\int\frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}\,dx$.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{x}{2}, x\ge 0,\\ x\arctan x, x<0.\end{cases}$　　计算 I= $\int_0^{\pi+1}f(x-1)dx$.

(4) 求 $y^2=4(x+1)$ 与 $y^2=4(1-x)$所围图形的面积.

（五） 证明题（每小题 **15** 分，共 **30** 分）。请将答案写在答题纸上，并表明题号。

(1) 设 $f(1)=0$，$f'(x)$ 在1的某个邻域连续，并且 $f'(1)\ne 0$．证明 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\ln(x-1)=0$．

(2) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 二阶可导，$f(a)=f(b)$，并且存在 $c\in(a,b)$，使得 $f'(c)<0$．证明：存在 $\alpha\in(a,b)$ 使得 $f''(\alpha)>0$．