中 山 大 学

二〇一〇年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码： 651

科目名称： 数学分析

考试时间： 1 月 10 日 上 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄原题。

重要提示：本试题分为数学分析、线性代数两套题目，请报考非信息工程方向考生选择“数学分析”作答，报考信息工程方向考生选择“线性代数”作答（选错题目者，不予计分，所造成的后果由考生自行负责）。请在答题纸上注明试题名称，例如：选择“数学分析”者，首先在答题纸写上：数学分析，再另起一行作答。

数学分析：（150 分）

一、（每小题 6 分，共 48 分）

（1）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n+1)}$

（2）计算不定积分 $\int\max(|x|,1)dx$

（3）已知 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}dt$，求定积分 $\int_0^\pi f(x)dx$

（4）求二元函数极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$

（5）求二次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 e^{x^2}dx$

（6）计算 $I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 为一条无重点、分段光滑且不经过原点的连续封闭曲线，L 的方向为逆时针方向。

（7）讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos x)\sin nx}{\sqrt{n+x}}$ 在 $[0,2\pi]$ 上的一致收敛性。

（8）计算 $\iint\limits_S\left(x^2+y^2\right)dS$，其中 S 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围几何体的表面。

二、（12 分）单位圆盘中切去圆心角为 θ 的扇形，余下部分粘合成一锥面。问 θ 为多少时，该锥面加上底面所围成的锥体体积最大？

三、（16 分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某领域内有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$。证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

四、（16分）设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^p\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

其中 p 为正数。试分别确定 p 的值，使得如下结论分别成立：

（1） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续；

（2） $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$ 都存在；

（3） $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。

五、（16分）计算由曲面

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1，\left(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, a>0, b>0, c>0\right),$$

所围几何体之体积，其中 a,b,c 为正常数。

六、（16分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n!2^n}x^n$ 的收敛范围，并求其和函数。

七、（16分）设 $u=f(r)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 。变换方程：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，使其成为关于 $f(r)$ 的方程。

八、（10分）判别级数

$$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$$

的收敛性。

线性代数：（150分）

一、(10分) 已知方程 $x^3-6x^2+15x-14=0$．求其有理根.

二、(10分) 计算 n 阶行列式：$\begin{vmatrix}2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ & & 1 & 2\end{vmatrix}$.

三、(15分) 解方程组

$$\begin{cases}(a+1)x_1+x_2+x_3=a^2+2a,\\ x_1+(a+1)x_2+x_3=a^3+2a^2,\\ x_1+x_2+(a+1)x_3=a^4+2a^3.\end{cases}$$

四、(10 分) 设方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 试计算 A^2, A^3，并进一步计算 A^n.

五、(10 分) 设 A, B 为 $n\times n$ 矩阵. 证明: 若 $AB=0$，则 秩(A)+秩(B)$\le$n.

六、(20 分) 设 $H=I-2ww^T$ 为 n 阶实方阵，这里的 I 表示单位矩阵, $w\in R^n$ 且 $\|w\|_2=1$. 证明：（1）H 是实对称的正交矩阵；（2）H 仅有两个互不相同的特征值 -1 和 1，其中 1 是 $n-1$ 重的，-1 是单重的且 w 就是属于 -1 的特征向量；（3）$\det(H)=-1$.

七、(20 分) 设 τ 是数域 F 上 n 维向量空间 V 的一个线性变换. $x\in V$ 且 $\tau^{r-1}(x)\neq 0$，$\tau^r(x)=0$. 证明：（1）$x, \tau(x), \cdots, \tau^{r-1}(x)$ 线性无关；（2）记 $C(x)$ 为由 $x, \tau(x), \cdots, \tau^{r-1}(x)$ 张成的子空间，记 $\beta=(x, \tau(x), \cdots, \tau^{r-1}(x))$ 为 $C(x)$ 的基，试求 $\tau|_{C(x)}$ 关于 β 的矩阵.

八、(35 分) 设二次型 $q(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-4x_1x_2-8x_1x_3+4x_2^2-4x_2x_3+x_3^2$.（1）求二次型的矩阵 A；（2）将二次型化为标准型；(3) 指出正、负惯性指标与符号差；（4）求正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵；（5）求 A^{100}.

九、(20 分) 若 $C[-1.1]$ 表示 $[-1.1]$ 上所有连续函数的集合，在 $C[-1.1]$ 上定义内积：$(f(x), g(x))=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. (1) 用 Gram-Schmidt 方法，由 $1, x, x^2, x^3$ 求出 $C[-1.1]$ 的一个正交向量组；（2）求一个形如 $f(x)=a+bx^2-x^4$ 的多项式，使它与所有低次多项式正交.