中 山 大 学

二〇一〇年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码： 663

科目名称： 数学分析与高等代数

考试时间： 1 月 10 日 上 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

一、数学分析 （9 小题共 150 分）

1. (15 分) 用ε–N 定义证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\arctan\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=0$.

2. (15 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$.

3. (15 分) 计算积分 $\int_0^1\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的近似值，要求误差不超过 0.000 1 .

4. (15 分) 判定下列反常积分的收敛性 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x|\sin x|}$.

5. (15 分) 求点 $A(2,8)$到抛物线 $y^2=4x$ 的最短距离.

6. (15 分) 计算 $\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v$，其中$\Omega$ 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域.

7. (20 分) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的和函数.

8. (20 分) 小船从河边点 O 处出发驶向对岸(两岸为平行直线). 设船速为 a，船行方向始终与河岸垂直，又设河宽为 h，河中任一点处的水流速度与该点到两岸距离的乘积成正比(比例系数为 k). 求小船的航行路线.

9. (20 分) 证明 $\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$ 存在.

考试完毕，试题和草稿纸随答题纸一起交回。

二、高等代数（9小题共150分）

1. (15分) 证明 $f(x)=x^3-5x+1$ 在有理数域上不可约.

2. (15分) 计算 $D_n=\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}$.

3. (15分) 设 A，B 都是 n 阶可逆矩阵，证明 $D=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$ 必为可逆矩阵，并求 D 的逆矩阵.

4. (15分) 将矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 表示成有限个初等方阵的乘积.

5. (15分) 设 A 是 $m\times 3$ 矩阵，且 $R(A)=1$. 如果非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量 η_1，η_2，η_3 满足 $\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\eta_3+\eta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，求 $Ax=b$ 的通解.

6. (15分) 研究下列向量组的线性相关性 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

7. (20分) 设 A 是3阶矩阵，它的3个特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=2$，设 $B=A^3-5A^2$，求 $|B|$；$|A-5E|$.

8. (20分) 设实对称阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，求正交变换 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角阵.

9. (20分) 设 A 是 n 阶下三角阵. 如果 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$，且至少有一 $a_{i_0j_0}\neq 0$ $(i_0>j_0)$，证明 A 不可对角化.