中 山 大 学

二〇一一年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码： 657

科目名称： 数学分析

考试时间： 1 月 16 日 上 午

一、(每小题 6 分，共 48 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\tan x}$ ； (2) 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$ ；

(3) 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = A$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=B$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和；

(4) 计算 $\iint\limits_{\Omega}\left(2x+\dfrac{4}{3}y+z\right)dS$，其中 Ω 为平面 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ 在第一卦限部分；

(5) 计算 $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy$，其中 L 为曲线 $y=\sin x\ (0\le x\le \pi)$ 按 x 增大方向；

(6) 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\ln n}$ 是绝对收敛、条件收敛还是发散？

(7) 设 $\begin{cases} x=t^3-3t \\ y=t^2+2t \end{cases}$，求二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$；

(8) 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\Lambda\ \dfrac{2n-1}{2n}$

二、(12 分)设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，求偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，指出它们的定义域及连续性，并讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性.

三、(16 分) 设 $f(x)$ 满足：

① $-\infty < a \le f(x) \le b < +\infty$；

② $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$，$0<L<1$，$x,y\in[a,b]$；

任取 $x_1\in[a,b]$，作序列 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+f(x_n)\right)$，$n=1,2,\Lambda$.

求证：$\{x_n\}$ 收敛，且其极限 $\xi\in[a,b]$ 满足：$f(\xi)=\xi$.

四、(16 分) 设正项数列 $\{x_n\}$ 单调增，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ 发散.

五、（16分）已知 P 是 $\angle AOB$ 内一固定点，$\angle AOP=\alpha$，$\angle BOP=\beta$，线段长度 $\overline{OP}=L$，过 P 的直线交射线 OA 和 OB 于点 X 和 Y，求线段长度乘积 $\overline{PX}\cdot\overline{PY}$ 的最小值，说明取最值时 X，Y 的位置.

六、（16分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Omega}4zdydz-2zydzdx+\left(1-z^2\right)dxdy$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}z=e^y\\x=0\end{cases},(0\le y\le a)$ 绕 z 轴旋转一周所成曲面的下侧.

七、（16分）设 $f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$，$n=1,2,\Lambda$.

证明函数项级数 $f_1(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(f_{n+1}(x)-f_n(x)\right)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于零.

八、（10分）设 $0<x<1$，求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$ 的和函数.