中 山 大 学

二〇一一年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码： 885

科目名称： 计算方法

考试时间： 1 月 16 日 下 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

一、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

1、用牛顿迭代法解方程 $xe^x=1$ 的迭代格式是_____。

2、计算方法解决问题的主要思想是“以直代曲，以繁化简”，主要采用“构造性”方法、____________方法、____________方法和______________方法等。

3、对于给定的 $n+1$ 个互异的节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 和这些节点上 $f(x)$ 的函数值 $f(x_i)$，若用拉格朗日插值多项式 $P_n(x)$ 去逼近函数 $f(x)$，则 $P_n(x)$ 必须满足的插值条件是_____。

4、解一阶常微分方程初值问题的梯形方法（公式）为_____________。

5、设 $\{q_k(x)\}(k=0,1,\cdots,\infty)$ 是区间 $[0,1]$ 上权函数为 $\rho(x)=x$ 的最高项系数为 1 的正交多项式簇，其中 $q_0(x)=1$,则 $q_1(x)=$____________，$\int_0^1 xq_3(x)dx=$___________。

6、设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 α，若存在正数 c，P，其中 $c<1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^P}=c$，则称数列 $\{x_n\}$ 的收敛阶是_____，当收敛阶为 1 时，称 $\{x_n\}$ 为_____收敛；当收敛阶为 2 时，称 $\{x_n\}$ 为_____收敛。

二、简答题（每小题 5 分，共 30 分）

1、记 x^* 为 x 的近似数，则近似数 x^* 的绝对误差限和相对误差限分别是什么？

2、什么是算法的时间复杂度？

3、什么叫矛盾方程组？请说明用最小二乘法解矛盾方程组的思路。

4、什么叫正交多项式？对 $n+1$ 个求积节点，高斯求积公式的代数精度可达多少？

5、请给出函数 φ 满足压缩映射的定义。

6、设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵，请写出 $\mathbf{A}$ 的 1 范数、2 范数和无穷范数的定义式。

三、计算题（共 90 分）

1、（15 分） 请用 LU 分解法求解方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ -1 & -3 & 5\end{bmatrix}\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\3\\2\end{bmatrix}$$

2、（30 分） 用迭代法求解方程组

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ x_2 + 4x_3 = 14 \end{cases}$$

(1)写出雅可比迭代格式、迭代矩阵 $\mathbf{B}$，并分析雅可比迭代是否收敛？如果收敛，取初始向量 $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$，做前两次迭代（即求 $\mathbf{x}^{(1)}$， $\mathbf{x}^{(2)}$）。（保留小数点后 3 位数字）

(2)写出高斯-塞德尔迭代格式、迭代矩阵 $\mathbf{B}$，并分析高斯-塞德尔迭代是否收敛？如果收敛，取初始向量 $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$，做前两次迭代（即求 $\mathbf{x}^{(1)}$， $\mathbf{x}^{(2)}$）。（保留小数点后 3 位数字）

3、（15 分） 已知 $f(0)=1$， $f(1)=3$， $f(2)=4$，求 $f(x)$ 的二次拉格朗日插值多项式，并求出 $f(x)$ 在 $x=0.5$ 处的一阶导数值。

4、（10 分）分别用梯形公式和辛浦生公式计算积分 $I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ 的近似值（保留小数点后 3 位数字）。

5、（10 分） 已知 x=1, 2, 4, 5 对应的观测值为 4, 6, 9, 13，求线性拟合函数。

6、（10 分） 用欧拉方法求解初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} (0 \le x \le 1, h = 0.2)$，

算出点 $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ 处的 y 值。（保留小数点后 3 位数字）。