中　山　大　学

二〇一一年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：　601

科目名称：　高等数学（B）

考试时间：　1　月　16　日　上　午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

一．填空题（每小题 5 分，共 60 分；答案写在答题纸上并注明题号.）

1．设函数 $f(x)=e^{\int_0^{x^2}\sin t dt}$，则 $f'\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)=$____________________.

2．函数 $y=x^3-3x+\displaystyle\int_e^{e^6}\frac{\sqrt{3\ln x-2}}{x}dx$ 在区间 $[0,2]$ 上的最小值为____________.

3．设函数 $f(x)$ 满足：$f(0)=0$ 且 $f'(0)=2$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(-2x)}{x}=$____________.

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}, & x\neq 1\\ a, & x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则 $a=$____________.

5．设函数 $f(x)$ 满足：$\int xf(x)dx=-x\cos x+\sin x+C$，其中 C 为任意常数，则 $\int f(x)\ln\sec x dx=$____________________.

6．设 $z=u^2\ln v$，$u=x^2$，$v=\dfrac{y}{x}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1,y=1}=$____________.

7．设 $y^2-e^y+2=x^2$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$____________________.

8．$\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^2+\frac{\sin x}{1+x^2}\right)dx=$____________________.

9．级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k+(-3)^k}{k}x^k$ 的收敛域为____________________.

10．若随机向量 (X,Y) 服从以横轴、纵轴、直线 $x=1$ 与 $y=1$ 所围成的正方形区域上的密度分布 $\rho(x,y)=4xy$，则期望 $E(X)=$________，$E(Y)=$________，$E(XY)=$________；协方差 $\mathrm{cov}(X,Y)=$________.

11．若随机变量 X 与 Y 相互独立，均服从 $[0,1]$ 上的密度分布 $\rho(t)=2t$，其中 $t\in[0,1]$，则 $Z=X+Y$ 的期望为 $E(Z)=$________，方差为 $D(Z)=$________.

12．甲、乙两人击中目标的概率分别是 0.6、0.7，如各射击 3 次，则击中次数相同的概率为____________________.

二.（本题满分 12 分）设 $z=f(x,y)$ 为二阶可微函数，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，证明 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$.

三.（本题满分 12 分）设函数 $f(x)=a_1\sin(x)+a_2\sin(2x)+\cdots+a_n\sin(nx)$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为实数，n 为正整数，而且 $|f(x)|\le|\sin(x)|$，证明 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\le 1$.

四.（本题满分 14 分）判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$ 的绝对收敛、条件收敛或发散性.

五.（本题满分 14 分）求方程 $xy'+y=-xy^2$ 的通解及其当 $x=1$ 时 $y=0$ 的特解.

六.（本题满分 12 分）设 D 是由直线 $y=x-1$ 与抛物线 $y^2=2x+6$ 所围成的区域，求 $\iint\limits_D xy\,dxdy$.

七.（本题满分 12 分） 某一制造商采用新的工艺生产某种产品，生产16件产品的平均费用是70.8元，标准差是5.9元．而用旧工艺生产同样多的同一产品时所需的平均费用是72.8元，标准差是6.1元．用 μ_1 和 σ_1 分别表示用新工艺生产产品所需的总体平均费用和标准差，用 μ_2 和 σ_2 分别表示用旧工艺生产产品所需的总体平均费用和标准差．在置信水平为95%下，

(1) 分别求 μ_1 和 μ_2 的置信区间；

(2) 假设 $\sigma_1=\sigma_2$，求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间.

[记 z_α 为标准正态分布的 α 上侧分位数，$\chi^2_\alpha(n)$ 为自由度为 n 的 χ^2 分布的 α 上侧分位数，$t_\alpha(n)$ 为自由度为 n 的 t 分布的 α 上侧分位数，则 $z_{0.025}=1.96$，$z_{0.05}=1.645$，$\chi^2_{0.025}(15)=27.488$，$\chi^2_{0.05}(15)=24.996$，$\chi^2_{0.025}(16)=28.845$，$\chi^2_{0.05}(16)=26.296$，$t_{0.025}(15)=2.131$，$t_{0.05}(15)=1.753$，$t_{0.025}(16)=2.120$，$t_{0.05}(16)=1.746$，$t_{0.025}(30)=2.042$，$t_{0.05}(15)=1.697$．]

八.（本题满分 14 分）假设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其样本平均记为 $\overline{x}$，$y_1,y_2,\cdots,y_m$ 为来自总体 Y 的简单随机样本，其样本平均记为 $\overline{y}$，总体 X 与 Y 相互独立，X 的期望为 $E(X)=\mu$，方差为 $D(X)=\sigma^2$，Y 的期望为 $E(Y)=\mu$，方差为 $D(Y)=4\sigma^2$．试求常数 a，使得 $a\overline{x}+(1-a)\overline{y}$ 的方差最小.