中 山 大 学

二〇一一年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码： 875

科目名称： 高等代数

考试时间： 1 月 16 日 下 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

注: R 与 C 分别表示实数域和复数域.

一 只写答案及主要计算过程, 每小题 15 分.

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$. 求矩阵 X 使得 $AX=B$.

2. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的对角元为 2，当 $|i-j|=1$ 时，$a_{ij}=-1$，其他元为 0． 求 A^{-1}.

3. 设 $f(x)=x^3+x^2+x+1$, $g(x)=x^3+2x^2+3x+4$. V 是数域 F 上的次数小于 4 的多项式组成的线性空间, 令 U 为由 $\{f, g\}$ 生成的子空间. 求商空间 V/U 的一组基.

4. 已知线性变换 $\sigma: R^2\to R^2, \sigma(x,y)=(2x+y, x+2y)$ .. 求 σ 的特征值和特征向量.

5. 设 $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$, $g(x)=2x^3-x^2-5x+4$． 求 f 与 g 的首一最大公因式 (f,g).

6. 设 $x=(1,-1,0), y=(1, 0, -1)$, $z=(4,2,0)\in R^3$． 求 z 到由 $\{x, y\}$ 生成的子空间 U 的距离.

二　要求写出详细步骤.

1（10 分）. 设 $f(x)=(x-3)^2$，$g(x)=x-1$ 是 R 上的两个多项式. 定义 R 上线性空间 R^3 的线性变换 σ 如下：$\sigma: R^3 \to R^3$，　$\sigma(x,y,z)=(2x+y,\ x+2y,\ 3z)$.
证明：$R^3=\ker f(\sigma)\oplus\ker g(\sigma)$.

2（10 分）. 设 A，$B\in M_n(R)$. 证明：A 与 B 在 R 上相似当且仅当 A 与 B 在 C 上相似.

3（10 分）. 设 n 元实二次型 $q(X)=X^TAX$ 满足条件：$q(X)=0$ 当且仅当 $X=0$.
证明：$q(X)$ 是正定的或者是负定的.

4（12 分）. 设 V 为数域 F 上线性空间，S 和 T 是 V 的子空间，f 是 V 上的线性变换. V^* 表示 V 的对偶空间，S^0 表示 S 的零化子，即 $S^0=\left\{f\in V^*:\ f(S)=0\right\}$，而 f^* 表示 f 的转置，即 $f^*: V^*\to V^*$，$g\mapsto gf, \forall g\in V^*$.
证明：

1). $(S\cap T)^0=S^0+T^0$；

2). $\operatorname{Im} f^*=(Ker\ f)^0$.

5（18 分）. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

1) 求正交矩阵 Q 及主对角元大于零的上三角矩阵 T 使得 $A=QT$；

2) 求正定矩阵 P 及正交矩阵 O 使得 $A=PO$；

3) 求正交矩阵 U 及正交矩阵 V 使得 UAV 为对角矩阵.