中 山 大 学

二〇一二年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码： 620

科目名称： 一元微积分

考试时间： 1 月 8 日 上 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

(一) 填空题(每小题 5 分，共 40 分)请将答案写在答题纸上，并表明题号。

(1) 函数$f(x)$满足关系式$f(x)+2f(1-x)=(x-1)^2$，则$f(x)$=（ ）。

(2) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$的$\varepsilon$- δ定义为( ).

(3) 由方程$e^{xy}+x^2y-1=0$确定的隐函数$y=y(x)$的导函数为( )。

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=$（ ）。

(5) 函数$y=x\sin 2x$的微分为（ ）。

(6) 方程$x^5+x+1=0$在区间(-1, 0)内有( )个实根.

(7) 设$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+2x)}{x}, x\neq 0,\\ a, x=0\end{cases}$ 当a=( )时，函数在点x=0处连续。

(8) 设$f'(x+1)=x$, 则$f(x)$=( ).

(二) 选择题(每题只有一个选择项正确，每小题 5 分，共 30 分)
请将答案写在答题纸上，并表明题号。

(1) 设$f(t)$是连续函数且为奇函数，则函数$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是（ ）.

(A) 奇函数 (B) 偶函数 (C) 非奇非偶函数. (D) 非连续函数.

(2) 若函数$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$在$x$=0处（ ）.

(A) 连续且可导； （B）连续，不可导；

（C）不连续； （D）都不是.

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b \arctan x\mathrm{d}x =$ (　　).

(A) $\arctan x$;　　(B) $\dfrac{1}{1+x^2}$;

(C) $\arctan b-\arctan a$;　　(D) 0

(4) 关于数列$\{x_n\}$的子列，下列叙述错误的是（　）

(A) 若$\{x_n\}$是柯西列，则$\{x_n\}$的任一子列都收敛.

(B) 若$\{x_n\}$是有界数列，则$\{x_n\}$必有一子列收敛.

(C) 若$\{x_n\}$是无界数列，则$\{x_n\}$的任一子列都不收敛.

(D) 若当$n\to\infty$时$\{x_n\}$是无穷大量，则$\{x_n\}$的任一子列都不收敛.

(5) 已知$f(x)$在$x=0$处可导且$f(0)=0$，有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$（　　）

(A) $-2f'(0)$;　(B) $f'(0)$;　(C) $-f'(0)$;　(D) 0.

(6) 设$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则（　　）

(A) $F(x)$在$x=0$点不连续

(B) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，在$x=0$点不可导

(C) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且满足$F'(x)=f(x)$

(D) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，但不一定满足$F'(x)=f(x)$

(三) 计算题(每小题 10 分，共 40 分)请将答案写在答题纸上，并表明题号。

(1) 设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a-e^{-x}}{x}, x<0\\ 1+b\sin 2x, x\geq 0\end{cases}$，确定$a$, b，使得$f(x)$在x=0处可导。

(2) 计算$\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{(3-x)^2}dx$。

(3) 求函数$f(x)=2x^3-6x^2-18x+7$的单调区间和极值。

(4) 计算$\int e^x\sin x dx$。

(四) 证明题(第 1 小题 10 分，第 2 和 3 小题各 15 分，共 40 分)请将答案写在答题纸上，并标明题号。

1．证明不等式：$e^{\pi} > \pi^{e}$.

2．设 $f(x)$ 在$[a, b]$上连续，且 $f(x) > 0$，令：

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \quad（a \le x \le b）$$

求证：（1）$F'(x) \ge 2$；

（2）方程 $F(x) = 0$ 在区间（a, b）内有且仅有一个根。

3．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微，且对任意 $x \in (a,b)$，有 $|f''(x)| \le M$, 又 $f(a) = f(b)$.

求证：$|f'(x)| \le \dfrac{M}{2}(b-a), x \in [a,b], (b > a)$.