

中山大学

二〇一二年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 603

科目名称: 数学三(单考)

考试时间: 1 月 8 日 上 午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上, 答在试题纸上的不计分! 请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号, 不必抄题。

1、求下列极限(10分):

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(a^{\frac{1}{x}} - b^{\frac{1}{x}}), (a, b > 0)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} (a \geq 0)$$

2、求下列的导数或微分(20分):

$$(1) \text{ 设 } y = x(\sin x)^{\cos x}, \text{ 求 } y'.$$

$$(2) \text{ 设由方程 } x^y = y^x \text{ 确定 } y \text{ 是 } x \text{ 的函数, 求 } \frac{dy}{dx}.$$

3、计算下式(20分):

$$(1) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} (a > 0)$$

$$(2) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx$$

4、(10分) 三个箱子中, 第一箱装有4个黑球1个白球, 第二箱装有3个黑球3个白球, 第三箱装有3个黑球5个白球。现先任取一箱, 再从该箱中任取一球, 问: (1) 取出的球是白球的概率是多少? (2) 若取出的为白球, 则该球属于第二箱的概率是多少?

5、(10分) 设离散型随机变量 X 只取 $-1, 2, \pi$ 三个可能值, 取各相应值的概率分别为 $a^2, -a, a^2$ 。求 X 的分布函数。

6、(15分) 设连续性随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 并且 $EX = 0.5$, $DX = 0.15$ 。求概率 $P\{0 \leq x \leq 0.5\}$ 。

7、(15 分) 设连续性随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Ax^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

求: (1) 系数 A ; (2) X 落在 $(-1, 0.5)$ 内的概率; (3) X 的分布密度。

8、(15 分) 编号为 1、2、3 的三个球随机放入编号为 1, 2, 3 的三个盒子中, 每盒仅放一个球。令 $X_i = 1$, 如果第 i 号球落入第 i 号盒子中; $X_i = 0$, 其他 (其中 $i = 1, 2$)。求 (X_1, X_2) 的联合分布及 X_1 与 X_2 的相关系数。

9、(15 分) 二维连续性随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} kxy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 求:

(1) k 的值; (2) (X, Y) 的联合分布函数。

10、(20) 假设随机变量 X 和 Y 的数学期望都为 1, 方差皆为 2, 其相关系数为 0.25, 求随机变量 $U = X + 2Y, V = X - 2Y$ 的相关系数。