

中山大学

二〇一二年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 669

科目名称: 数学分析与高等代数

考试时间: 1月8日 上午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上, 答在试题纸上的不计分! 请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号, 不必抄题。

一、数学分析 (共 150 分)

1. (每小题 15 分, 共 60 分) 计算下列各题:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 n 是给定的自然数.

(2) $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$.

(3) 设 $u = f(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数, 又函数 $y = y(x)$ 及 $z = z(x)$ 分别由以下两式确定

$$e^{xy} - xy = 2, \quad e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$$

求 $\frac{du}{dx}$.

(4) 计算 $I = \int_L (x^2 - y) dx + (y^2 - x) dy$, 其中 L 是沿逆时针方向以原点为中心、 a 为半径的上半圆周.

2. (15 分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

3. (15 分) 设函数 f 连续, 且 $\int_0^1 t f(2x-t) dt = \frac{1}{2} \arctan(x^2)$, $f(1) = 1$, 求 $\int_1^2 f(x) dx$.

4. (20 分) 试将 $f(x) = \ln x$ 按 $\frac{x-1}{x+1}$ 的幂展开成幂级数.

5. (20 分) 设 $f(x, y)$ 在闭区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ 上连续, 且恒取正值, 试求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_D (f(x, y))^{\frac{1}{n}} \sin x d\sigma$$

6. (20 分) 设 $f(x)$ 满足 $f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$, 其中 $g(x)$ 为任一函数.

证明: 若 $f(x_0) = f(x_1) = 0$ ($x_0 < x_1$), 则 $f(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 上恒等于 0.

二、高等代数 (共 150 分)

1.(15 分) 计算

$$D = \begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+y & a \\ a & a & a & a+y \end{vmatrix}, \text{ 其中 } axy \neq 0.$$

2.(15 分) 证明: n 阶三对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ & & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \begin{cases} (n+1)\alpha^n, & \text{当 } \alpha = \beta; \\ \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}, & \text{当 } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

3.(15 分) 非齐次线性方程组的增广矩阵为

$$(A, b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & 13 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & p & 10 & 1 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -3 & 11 & 1 \end{array} \right).$$

问: p 取何值时, 方程组有解? 并求解.

4.(15 分) 设 n 阶矩阵 (n 为奇数) A 满足 $A^T A = I$, 且 $|A| > 0$, 求行列式 $|A - I| = ?$

5.(15 分) 设 $\alpha = (1, 0, -1)^T$, $\beta = (1, -1, 2)^T$, $A = \alpha\beta^T$, 且 $|kI - A^5| = k^3 + 1$, 试求 k .

6.(15 分) 求解代数方程 $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 5 = 0$.

7.(20 分) 证明: 若 n 阶方阵 A 的秩为 r , 则必有秩为 $n-r$ 的 n 阶方阵 B , 使 $BA = 0$.

8.(20 分) 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x 和 y ;

(2) 求一个可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

9.(20 分) 设方阵 A 满足 $A^2 = 2A$.

(1) 证明 $A - I$ 与 $A + 2I$ 均可逆, 并求其逆;

(2) $A - 2I$ 是否可逆?

(3) 列举两个这样的三阶矩阵 A .