

中山大学

二〇一二年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 601

科目名称: 高等数学(B)

考试时间: 1月8日上午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上, 答在试题纸上的不计分! 请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号, 不必抄题。

一. 填空题(每小题5分, 共60分; 答案写在答题纸上并注明题号.)

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right) =$ _____.

2. 函数 $y = \ln(x^2 - 1) + \frac{1}{x^2 - 1}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上的最小值为 _____.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x [\arctan(x)]^3 dx}{\sqrt{x^2 + 1}} =$ _____.

4. 设 $f(x)$ 是可导函数, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 5$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+2) - f(x)] =$ _____.

5. 设 $f(x) = \int_{\cos(x)}^{\tan(x)} (1 + xe^t) dt$, 则 $f'(x) =$ _____.

6. 设 $z = \arctan \left(\frac{x + y^2}{1 + xy} \right)$, 则 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{x=0, y=0} =$ _____.

7. 设 $z = f(x, y)$ 是由方程 $z = x + y \sin(z)$ 所确定的隐函数, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____,
 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

8. 定积分 $\int_0^{\pi/2} \frac{x + \sin(x)}{1 + \cos(x)} dx =$ _____.

9. 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2k-1}}{2k-1}$ 的收敛域为 _____.

10. 若随机向量 (X, Y) 服从正方形区域 $(0, 1) \times (0, 1)$ 上的密度分布 $\rho(x, y) = x + y$, 则期望 $E(X) =$ _____, $E(Y) =$ _____, $E(XY) =$ _____; 协方差 $\text{cov}(X, Y) =$ _____.

11. 若随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从标准正态分布, 则 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的期望为 $E(Z) =$ _____.

12. 甲乘汽车和乘火车的概率分别是 0.6、0.4, 汽车和火车正点到达的概率分别是 0.8、0.9. 如甲已正点到达, 则甲乘火车的概率为 _____.

二. (本题满分 12 分) 证明函数 $z = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ 满足热传导方程 $\frac{\partial z}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, 其中 a 和 b 都是常数.

三. (本题满分 12 分) 设函数 $f(x) = a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + \cdots + a_n \sin(nx)$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为实数, n 为正整数, 试证明 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 内必有一个根.

四. (本题满分 14 分) 试求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{n!} x^{2n+1}$ 的和函数.

五. (本题满分 12 分) 设 D 是由平面上的直线 $y = x$ 与曲线 $y = x^4$ 所围成的一个区域, 试求 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$.

六. (本题满分 14 分) 求方程 $2xyy' - y^2 + x = 0$ 的通解及其当 $x=1$ 时 $y=1$ 的特解.

七. (本题满分 14 分) 10 个不同厂家生产的餐桌的高度如下 (单位: cm):

74.3, 75.2, 73.9, 76.6, 74.3, 74.6, 75.5, 74.5, 74.4, 73.6.

这 10 个样本的均值为 74.69, 标准差为 0.869802. 假设餐桌的高度服从正态分布, 用 μ 和 σ 分别表示餐桌高度的总体均值和总体标准差, 在置信水平为 95% 下, 分别求 μ 和 σ^2 的置信区间.

[记 z_α 为标准正态分布的 α 上侧分位数, $\chi_\alpha^2(n)$ 为自由度为 n 的 χ^2 分布的 α 上侧分位数, $t_\alpha(n)$ 为自由度为 n 的 t 分布的 α 上侧分位数, 则 $z_{0.025} = 1.96$, $z_{0.05} = 1.645$, $\chi_{0.025}^2(9) = 19.023$, $\chi_{0.05}^2(9) = 16.919$, $\chi_{0.95}^2(9) = 3.325$, $\chi_{0.975}^2(9) = 2.700$, $t_{0.025}(9) = 2.262$, $t_{0.05}(9) = 1.833$, $\sqrt{10} = 3.162$.]

八. (本题满分 12 分) 某玻璃厂生产厚度为 5mm 的玻璃, 当标准差小于等于 0.05mm 时, 就认为是优等品. 现在抽查了 10 个样品, 得到样品均值为 $\bar{x} = 5.0\text{mm}$, 样本方差为 $S^2 = 0.005\text{mm}^2$, 在显著性水平 0.05 下, 能否认为此玻璃为优等品?