

中山大學

二〇一二年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 869

科目名称: 高等代数

考试时间: 1 月 8 日 下午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上, 答在试题纸上的不计分! 请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号, 不必抄题。

注: 这里 R 表示实数域, I 表示单位矩阵, id_V 表示 V 的恒等变换, 矩阵 C 的转置记为 C^T .

一 计算题, 每小题 15 分, 共 90 分.

1. 设 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n), b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R^n$, 计算矩阵 $A = I - a^T b$ 的行列式.

2. 设 n 阶实矩阵 A 的主对角元都为 0, 其余元都为 1. 求 A 的特征值与特征向量.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 求 A 的若当标准形.

4. 设 $f(x) = x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$, $g(x) = 3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$. 求 f 与 g 的首一最大公因式 (f, g) .

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 计算 A^{10} .

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 求一正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵, 并求正定矩阵 B 使得 $A = B^2$.

二 证明题, 每小题 10 分, 共 60 分.

1. 令 $S = \{(t, t^2, t^3) : t \in R\}$. 证明: $\text{span}(S) = R^3$.
2. 设 $A, B \in M_n(R)$, $A^2 = A$, $B^2 = B$, 且 $I - (A + B)$ 可逆. 证明: A 与 B 的秩相等.
3. 令 $S = \{AB - BA : A, B \in M_n(F)\}$. 证明: S 张成的子空间 $W = \text{span}(S)$ 的维数等于 $n^2 - 1$, 并且给出它的一个基.
4. 设 V 为数域 F 上线性空间, W 是 V 的子空间. V^* 表示 V 的对偶空间, W^0 表示 W 的零化子, 即 $W^0 = \{f \in V^* : f(W) = 0\}$. 证明: $W^* \cong V^* / W^0$.
5. 设 $q(X) = X^T A X$ 为 n 元实二次型. 如果 A 的所有特征值都属于区间 $[a, b]$. 证明: $A - tI$ 对应的二次型当 $t > b$ 时是负定的; 当 $t < a$ 时是正定的.
6. 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个正规变换, 且满足条件: $\sigma^2 = id_V$. 证明: σ 既是对称变换, 也是正交变换.