

2008 年湖南农业大学硕士招生自命题科目试题

科目名称及代码: _____ 数学 (616)

适用专业: _____ 环境科学

考生注意事项: ①所有答案必须做在答题纸上, 做在试题纸上一律无效;
②按试题顺序答题, 在答题纸上标明题目序号。

一、填空题(每小题 4 分, 共 24 分)

1. 曲线 $y = \frac{x^2 + x \sin x}{3x^2 - x}$ 的水平渐近线方程为 _____。

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$, 如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $k =$ _____。

3. 方程 $y^2 \cos x = \sin 3x$ 确定了 y 是 x 的隐函数, 则 y 的全微分是 _____。

4. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ 的通解是 _____。

5. $\Phi(x) = \int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值是 _____。

6. 若四阶矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则行列式 $|B^{-1} - I| =$ _____
(其中 I 表示单位矩阵)。

二、选择题(每小题 4 分, 共 40 分)

7. 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$, 当 $x \rightarrow 1$ 时, ()

- (A) $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小;
- (B) $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小;
- (C) $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小;
- (D) $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶, 但非等价无穷小。

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1}, & x \leq 1 \\ ax+b, & x > 1 \end{cases}$ 可导, 则必有 ()。

- (A) $a=1, b=2$; (B) $a=-1, b=2$;
 (C) $a=1, b=0$; (D) $a=-1, b=0$ 。

9. 设 $f(x)$ 是奇函数, 除 $x=0$ 外处处连续, $x=0$ 是其跳跃间断点, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 是 ()

- (A) 可导的奇函数; (B) 可导的偶函数;
 (C) 在 $x=0$ 间断的奇函数; (D) 连续的偶函数。

10. 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 可导, $x, x+\Delta x$ 是 (a, b) 内的任意两点, 则 ()。

- (A) $\Delta y = f'(x)\Delta x$;
 (B) 在 $x, x+\Delta x$ 之间恰有一个 ξ , 使 $\Delta y = f'(\xi)\Delta x$;
 (C) 在 $x, x+\Delta x$ 之间至少有一个 ξ , 使 $\Delta y = f'(\xi)\Delta x$;
 (D) 对于 $x, x+\Delta x$ 之间任意一个 ξ , 有 $\Delta y = f'(\xi)\Delta x$ 。

11. 设 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int xf(x)dx =$ ()。

- (A) $x \sin x + \cos x + C$; (B) $x \sin x - \cos x + C$;
 (C) $x \cos x + \sin x + C$; (D) $\cos x - \sin x + C$ 。

12. 设 $p > 0$, 则 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^p} dx$ ()。

- (A) 当 $p > 1$, 该积分收敛; (B) 当 $p \geq 1$, 该积分收敛;
 (C) 当 $0 < p \leq 1$, 该积分收敛; (D) 当 $p \neq 1$, 该积分收敛。

13. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则二次积分 $\int_{-1}^0 dx \int_{x+1}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)dy =$ ()

- (A) $\int_0^1 dy \int_{-1}^{y-1} f(x, y)dx + \int_1^2 dy \int_{-1}^{\sqrt{y^2-1}} f(x, y)dx$;
 (B) $\int_0^1 dy \int_{-1}^{y-1} f(x, y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-1}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x, y)dx$;

(C) $\int_0^1 dy \int_{-1}^{y-1} f(x, y) dx;$

(D) $\int_1^2 dy \int_{-1}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x, y) dx.$

14. 设 $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, 那么当函数 $z = f(x, y)$ 在驻点 $P_0(x_0, y_0)$ 处符合 () 时, 函数在驻点 $P_0(x_0, y_0)$ 处取到极小值。

(A) $B^2 - AC > 0, A > 0;$ (B) $B^2 - AC > 0, A < 0;$

(C) $B^2 - AC < 0, A > 0;$ (D) $B^2 - AC < 0, A < 0.$

15. 如果 n 阶矩阵 A 的任意一行元素之和都是 a , 则 A 有一个特征值 ()

(A) $a;$ (B) $-a;$ (C) $0;$ (D) $a^{-1}.$

16. 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 1 列加到第 2 列得 B , 再将 B 的第 1 行加到第 2 行得 C ,

$$\text{记 } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 ()}$$

(A) $C = P^{-1}AP;$ (B) $C = PAP^{-1};$

(C) $C = PAP^T;$ (D) $C = P^TAP.$

三 解答题 (共 86 分)

17. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$ (10 分)。

18. 设 $\begin{cases} x = \sqrt{1-t} \\ y = 2t - \frac{2}{3}t^3 \end{cases}$, 求 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{1}{2}}$ (12 分)。

19. 计算 $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$ (10 分)。

20. 设 $z = f\left(2x, \frac{x}{y}\right)$, 其中 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (10 分)。

21. 设 $f(x, y) = \begin{cases} ke^{-(3x+4y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, D 为 xOy 平面。为使 $\iint_D f(x, y) dx dy = 1$, 求 k (10 分)。

22. 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续, 若由曲线 $y = f(x)$ 、直线 $x = 1, x = t (t > 1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为 $V(t) = \frac{\pi}{3} [t^2 f(t) - f(1)]$, 试求

$y = f(x)$ 所满足的微分方程, 并求该微分方程满足条件 $y|_{x=2} = \frac{2}{9}$ 的解 (12 分)。

23. 设三阶方阵 A, B 满足 $A^{-1}BA = 6A + BA$, 且 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$, 求矩阵 B (10 分)。

24 设有方程组如下:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + (1+a)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + (2+a)x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + (3+a)x_4 = 0. \end{cases}$$

问当参数 a 为多少时, 它只有唯一零解? 当参数 a 为多少时, 它有非零解? 在有非零解时, 试用基础解系表示它的全部解 (12 分)。