

2008 年湖南农业大学硕士招生自命题科目试题

科目名称及代码： **数学分析 (614)**

适用专业： **生物数学**

考生注意事项：①所有答案必需做在答题纸上，做在试题纸上一律无效；
②按试题顺序答题，在答题纸上标明题目序号。

一、求下列极限（每小题 7 分，共 21 分）

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right)$

2、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$

3、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \sec^2 \frac{\pi}{4n} + \sec^2 \frac{2\pi}{4n} + \cdots + \sec^2 \frac{n\pi}{4n} \right)$

二、求下列函数的导数或全微分（每小题 7 分，共 21 分）

1、设 $y = x^2 \cos x$ ，求 $y^{(50)}$ 。

2、设 $F(x-y, y-z, z-x) = 0$ ，其中 F 具有连续的偏导数，求 dz 。

3、设 $z = (x + x^3 y)^{xy}$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

三、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1、证明不等式

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^{p-1} \leq 1, \text{ 其中 } 0 \leq x \leq 1, p \geq 1.$$

2、设 $f(x)$ 二阶可导，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1, f''(x) > 0$ ，证明： $f(x) \geq x$ 。

四、（12 分）已经函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 可导， $f(x) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ，且满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}, \text{ 求 } f(x).$$

五、(12分) 试确定常数 a, b, c 的值使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c, c \neq 0$.

六、(12分) 计算三重积分

$$\iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz, \text{ 其中 } V \text{ 为: } x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z.$$

七、(10分)。计算曲线积分

$$\int_L (x \sin x^2 + 2y) dx + (2x + ye^{y^2}) dy, \text{ 其中 } L \text{ 是沿曲线 } y = x^2 \text{ 从 } (0, 0) \text{ 到 } (1, 1) \text{ 的路径}$$

八、(12分) 设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$, 其中 n 为正整数, 证明方程存在唯一正实根 x_n , 并证

明当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$ 收敛。

九、(15分) 证明: 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ 收敛, 且 $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ 为正数, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)^2} p_n \text{ 也收敛。}$$

十、(15分) 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & -\pi < x < 0 \end{cases}$ 求函数 $f(x)$ 的付里叶级数。