2009 年湖南农业大学硕士招生自命题科目试题

科目名称及代码：820 高等代数　　　　　　　　适用专业：生物数学

考生注意事项：①所有答案必须做在答题纸上，做在试题纸上一律无效；
②按试题顺序答题，在答题纸上标明题目序号。

一、选择题（共计 30 分，每小题 6 分）

1．设 A 为 n 阶方阵，$R(A)=n-3$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $AX=0$ 的三个线性无关的解向量，则 $AX=0$ 的基础解系为（　　）

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$　　(B) $\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$

(C) $2\alpha_2-\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$　　(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_2,-\alpha_1-2\alpha_3$

2．设 A 为 n 阶方阵，α 是 n 维列向量，若秩 $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}=$ 秩(A)，则线性方程组（　　）

(A) $AX=\alpha$ 必有无穷多解　　(B) $AX=\alpha$ 必有惟一解

(C) $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0$ 仅有零解　　(D) $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0$ 必有非零解

3．已知 $Q=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$，$P$ 为三阶非零矩阵，且满足 $PQ=0$，则 $r(P)=$（　　）

(A) $t=6$ 时，$r(P)$ 必为 1　　(B) $t=6$ 时，$r(P)$ 必为 2

(C) $t\neq 6$ 时，$r(P)$ 必为 1　　(D) $t\neq 6$ 时，$r(P)$ 必为 2

4．A 是 n 阶矩阵，k 是非零常数，则 $|(kA)^*|$ 等于（　　）

(A) $k|A|^{n-1}$　　(B) $|k||A|^{n-1}$

(C) $k^{n(n-1)}|A|^{n-1}$　　(D) $k^{n-1}|A|^{n-1}$

5．A、B 是 n 阶方阵，且 A□B，则（　　）

(A) A、B 的特征矩阵相同　　(B) A、B 的特征方程相同

(C) A、B 相似于同一个对角阵　　(D) 存在正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT=B$

二、(15 分) 设 A、B 是 n 阶矩阵。证明：

(1) AB 与 BA 有相同的特征值；

(2) $tr(AB)=tr(BA)$。其中 $tr(A)$ 表示矩阵 A 主对角线上的元素之和。

三、(15 分) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，且可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表示。证明：这两个向量组等价，从而 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 也线性无关。

四、(15 分) 设矩阵 $A_{s\times n}$ 的秩为 r，线性方程组 $AX=b$ 有特解 ξ，它的导出方程组 $AX=0$ 的一个基础解系为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，证明：

(1) 向量 $\eta_0=\xi_0,\eta_1=\xi_0+\xi_1,\cdots,\eta_{n-r}=\xi_0+\xi_{n-r}$ 是方程组 $AX=b$ 的线性无关解向量；

(2) $\eta_0,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 的一切线性组合 $k_0\eta_0+k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$，(其中 $k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=1$)是方程组 $AX=b$ 的全部解。

五、(15 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 经正交线性替换化为标准型 $2y_1^2+5y_2^2-y_3^2$，求所用的正交线性替换。

六、(15 分) 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 3 维线性空间 V 的一组基，线性变换 A 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，

1. 求 A 在基 $\eta_1=\varepsilon_1$，$\eta_2=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3$，$\eta_3=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3$ 下的矩阵；
2. 求 A 的特征值与特征向量.

七、(15 分) 设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定，B 为 $m\times n$ 实矩阵，试证：B^TAB 为正定矩阵的充分必要条件是 $r(B)=n$。

八、（15 分）设A为n阶方阵，$f(\lambda)=|\lambda E-A|$是A的特征多项式，并令

$$g(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{(f(\lambda),f'(\lambda))}$$

证明：A与一个对角矩阵相似的充分必要条件是$g(A)=0$。

九、(15 分)设V是n维欧氏空间，$\alpha\neq 0$是V中一个固定向量.

证明：1. $U=\{\beta\,|\,(\beta,\alpha)=0,\beta\in V\}$是$V$的一个子空间；

2. U的维数等于$n-1$。