

## 2009 年湖南农业大学硕士招生自命题科目试题

科目名称及代码: 数学分析 (614)

适 用 专 业: 生 物 数 学

考生注意事项: ①所有答案必须做在答题纸上, 做在试题纸上一律无效;

②按试题顺序答题, 在答题纸上标明题目序号。

一、计算题: (共 65 分)

1. (10 分) 求  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$

2. (10 分) 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $z = e^{2x-3z} + 2y$  确定, 求  $3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$

3. (10 分) 设区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ , 计算二重积分

$$I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$$

4. (15分) 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy,$$

其中  $\Sigma$  是曲面  $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$  的上侧.

5. (10 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$  的收敛区间与和函数  $f(x)$ .

6. (10 分) 设直线  $l: \begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$  在平面  $\pi$  上, 而平面  $\pi$  与曲面

$z = x^2 + y^2$  相切于点  $(1, -2, 5)$ , 求  $a, b$  之值.

二、证明题：（共 50 分）

1. （10 分）设  $e < a < b < e^2$ ，证明  $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$ 。

2. （20 分）已知函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续，在  $(0,1)$  内可导，且  $f(0) = 0, f(1) = 1$ 。

证明：

(I) 存在  $\xi \in (0,1)$ ，使得  $f(\xi) = 1 - \xi$ ；

(II) 存在两个不同的点  $\eta, \zeta \in (0,1)$ ，使得  $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$ 。

3. （20 分）设  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}), (n = 1, 2, \dots)$ ，证明：

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在

(2) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$  收敛

三、综合应用题：（共 35 分）

1. （20 分）过坐标原点作曲线  $y = \ln x$  的切线，该切线与曲线  $y = \ln x$  及  $x$  轴围成平面图形 D。

(1) 求 D 的面积 A；

(2) 求 D 绕直线  $x = e$  旋转一周所得旋转体的体积 V。

2. （15 分）求  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$  在椭圆域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$  上的最大值和最小值。