

2009 年湖南农业大学硕士招生自命题科目试题

科目名称及代码：数 学（360）

适用专业：环境科学

考生注意事项：①所有答案必须做在答题纸上，做在试题纸上一律无效；
②按试题顺序答题，在答题纸上标明题目序号。

一、填空题(每小题 4 分, 共 24 分)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = e^3$, 则 $a =$ _____.

2. 若函数 $f(x) = \frac{px^3 + 3x^2 + qx + 6}{(x^2 + 3x + 2)^2}$ 的原函数为有理函数, 则 $p =$ _____,
 $q =$ _____.

3. 曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在点 (0,1) 处的法线方程为 _____.

4. 微分方程 $x \frac{dy}{dx} + y = xy \frac{dy}{dx}$ 的通解是 _____.

5. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足 $\int_0^{x^2} f(t) dt = e^{x^2} - 1$, 则 $f(x) =$ _____.

6. 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ _____.

二、选择题(每小题 4 分, 共 40 分)

7. 设 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) \neq 0$,
 $\varphi(x)$ 有间断点, 则 ()

- (A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点; (B) $\varphi^2(x)$ 必有间断点;

- (C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点; (D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点。

8. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 为 ()

- (A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4。

9. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x < 0 \\ b + \sin 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则 ()

- (A) $a=2, b=1$; (B) $a=1, b=2$;
(C) $a=-2, b=1$; (D) $a=2, b=-1$ 。

10. 在数列 $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$ 中最大的一个数是 ()

- (A) $\sqrt{2}$; (B) $\sqrt[3]{3}$; (C) $\sqrt[4]{4}$; (D) 没有最大数。

11. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{x}$, 则 $\int x f'(x) dx =$ ()

- (A) $\cos x - \frac{2 \sin x}{x} + C$; (B) $\sin x - \frac{\sin x}{x} + C$;
(C) $-\cos x + C$; (D) $\sin x + C$ 。

12. 设函数 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 且 $F(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)dt$,

如果 $f(x)$ 是偶函数, 则 ()

- (A) $F(x)$ 是偶函数; (B) $F(x)$ 是奇函数;
(C) $F(x)$ 是非奇非偶函数; (D) 以上结论都不对。

13. 已知 $\frac{(x+cy)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分, 则 c 等于 ()

- (A) -1; (B) 0; (C) 1; (D) 2.

14. 极坐标系下二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 可以写成 ()

- (A) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y) dx$; (B) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y) dx$;
(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y) dy$; (D) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y) dy$ 。

15. 如果 3 阶方阵 A 是非零矩阵, 矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

且 $AB=0$, 则下列结论正确的是 ()

- (A) 当 $t=6$ 时, A 的秩必为 1; (B) 当 $t=6$ 时, A 的秩必为 2;
(C) 当 $t \neq 6$ 时, A 的秩必为 1; (D) 当 $t \neq 6$ 时, A 的秩必为 2。

16. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是 ()

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$;
(B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$;
(C) $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$;
(D) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 22\alpha_3, 3\alpha_1 + 5\alpha_2 - 5\alpha_3$ 。

三 解答题(18, 22, 23 每小题 12 分, 其它每小题 10 分, 共 86 分)

17. 如果 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^x - 1} \ln \left[1 + \frac{f(2x)}{\sin x} \right] = 1$, 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ (10 分)。

18. 设函数 $f(x)$ 满足条件 $f(0)=10$, 且其二阶导数 $f''(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续,

并满足 $\int_0^\pi [f''(x) + 4f(x)] \sin 2x dx = 8$, 求 $f(\pi)$ (12 分)。

19. 计算 $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx$ (10 分)。

20. 设 $z = (x^2 + y^2) e^{-\arctan \frac{y}{x}}$, 求全微分 dz (10 分)。

21. 计算二重积分 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = x^2 - 1$ 及 $y = -x + 1$ 所围成的平面区域 (10 分)。

22. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内大于零, 并满足 $xf'(x) = f(x) + ax^2$ (a 为常数), 又曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x=1, y=0$ 所围成的平面图形 S 的面积为 2, 求函数 $y = f(x)$, 并求 a 为何值时, 平面图形 S 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积最小 (12 分)。

23. 设 n 阶方阵 A, B 满足 $2B^{-1}A = A - 4E$, 其中 E 为 n 阶单位矩阵。

(1) 证明 $B - 2E$ 为可逆矩阵, 并求 $(B - 2E)^{-1}$;

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 B (12 分)。

24. 设有方程组如下:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \end{cases}$$

求它的通解 (10 分)。