

2010 年湖南农业大学硕士招生自命题科目试题

科目名称及代码：高等代数(820) 适用专业 生物数学

考生注意事项：①所有答案必须做在答题纸上，做在试题纸上一律无效；

②按试题顺序答题，在试题纸上标明题目序号。

1. (20 分) 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & \cdots & x_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

2. (15 分) 设 $(f(x), g(x)) = 1$, n 为任意正整数, 证明 $(f, g^n) = 1$

3. (20 分) 证明: 设 A 是 $m \times n$ 的矩阵, B 是 $n \times t$ 的矩阵, 证明

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

4. (15 分) 设 σ, τ 是线性空间 V 的两个线性变换, 且 $\sigma^2 = \sigma, \tau^2 = \tau$,

证明 $\sigma\tau = \tau\sigma = 0 \Leftrightarrow (\sigma + \tau)^2 = \sigma + \tau$ 。

5. (20 分) 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}, \\ b_n = 5a_{n-1} - b_{n-1} \end{cases}, \text{ 且 } a_0 = 1, b_0 = 0,$$

求 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项

6. (20 分) 设齐次线性方程组为

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0 \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

7. (20 分) 设 σ 是 n 维线性空间 V 上线性变换, $\xi \in V$, 且 $\xi, \sigma(\xi), \dots, \sigma^{k-1}(\xi)$

都不为 0, $\sigma^k(\xi) = 0$, 证明 $\xi, \sigma(\xi), \dots, \sigma^{k-1}(\xi)$ 线性无关.

8. (20 分) 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 证明:

(1) 存在实数 k , 使对一切 $x \in R^n$, 有 $|x^T Ax| \leq kx^T x$;

(2) 若 A 正定, 则对任意正整数 n, A^n 也是对称正定矩阵;