

2010 年湖南农业大学硕士招生自命题科目试题

科目名称及代码: 数学分析 (614)适 用 专 业: 生物数学**考生注意事项:** ①所有答案必须做在答题纸上, 做在试题纸上一律无效。

②按试题顺序答题, 在答题纸上标明题目序号。

一 求下列极限 (共 16 分, 每小题 8 分)

1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (1 + \sec^2 \frac{\pi}{4n} + \sec^2 \frac{2\pi}{4n} + \cdots + \sec^2 \frac{n\pi}{4n})$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x \sin x^2}$

二 求下列函数的导数或者微分 (共 16 分, 每小题 8 分)

1. 设 $y = x^2 \sin x$, 求 $y^{(50)}$;

2. 设 $F(x-y, y-z, z-x) = 0$, 求 dz

三 证明下列不等式 (共 18 分, 每小题 9 分)

1. $\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} (x > 0)$.

2. 设 $0 < a < b$, 证明:

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

四 求不定积分 $\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$. (本题 10 分)五 设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) < f(x) < m$ (m 为常数), 求由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 以及直线 $x = a$, $x = b$, ($a < b$) 所围成的

平面图形绕直线 $y = m$ 旋转而成的旋转体的体积。(本题 15 分)

六 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值。(本题 15 分)

七 求二重积分 $\iint_D e^{-y^2} dx dy$, 其中区域 D 由直线 $y = 1, x = 0$ 和 $y = x$ 所围成。(本题 10 分)

八 计算由曲面 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 所围成的立体的体积。
(本题 15 分)

九 讨论下列级数或者广义积分的敛散性。
(共 15 分, 第 1 小题 7 分, 第 2 小题 8 分)

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{n!}{n^n}$$

$$2. \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x^3 dx, (\alpha > 0)$$

十 (本题 10 分) 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续的导数, 在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上, 曲线积分 $\oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 的值恒为常数, 证明:

(1) 对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C 上, 有 $\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$ 。(本小题 5 分)

(2) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式。(本小题 5 分)

十一 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 在 $(0, +\infty)$ 内可导且满足 $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0, f(x) \geq f'(x)$, 证明: $f(x) \equiv 0$ 。(本题 10 分)