2011 年湖南农业大学硕士招生自命题科目试题

科目名称及代码： **高等代数 820**

适 用 专 业：生物数学

考生注意事项：①所有答案必须做在答题纸上，做在试题纸上一律无效。

②按试题顺序答题，在答题纸上标明题目序号。

1、（15 分）令 $f(x^3)+xg(x^3)$ 可以被 x^2+x+1 整除，证明：$f(1)=g(1)=0$.

2、（15 分）证明：$\dfrac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & \dfrac{d}{dt}a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & \dfrac{d}{dt}a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & \dfrac{d}{dt}a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$.

3、（20 分）其次线性方程组 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0,\quad (i=1,2,\cdots n-1)$ 的系数矩阵 $A=(a_{ij})_{(n-1)\times n}$，设 M_i 是从 A 中划去第 i 列后剩下的 $n-1$ 阶子矩阵的行列式，证明：

（1）$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$ 方程组的解.

（2）若 A 的秩为 $n-1$，则 $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组的一个基础解系.

4、（20 分）设 A 是 $n\times n$ 矩阵（$n\geq 2$），那么，秩（A^*）$=\begin{cases} n, & R(A)=n, \\ 1 & R(A)=n-1, \\ 0 & R(A)<n-1. \end{cases}$

5、（15 分）设 A,B,C,D 都是 n 阶矩阵，其中，$\det A\neq 0$, AC=CA，证明：

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\det(AD-CB).$$

6、（15 分）证明 W=$\left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}; a,b,c\in R\right\}$ 是线性空间 $M_3(R)$ 的子空间，并求 W 的一

组基及维数.

7、（20分）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，已知$Ax=\beta$有解但不唯一，求（1）a；

（2）正交矩阵Q，使得Q^TAQ为对角矩阵.

8、（15分）已知A,B为正定矩阵，且$AB=BA$，证明AB也为正定矩阵.

9、（15分）设向量组$\alpha_1=(1,1,1,3)^T,\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T,\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T$，$\alpha_4=(-2,-6,10,p)^T$.问：p为何值时，该向量组线性相关，并求此时该向量组的一个秩和一个极大无关组.