湘潭大学 2008 年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

适用专业：基础数学、应用数学、计算数学、运筹学与控制论、概率论与数理统计

注意：所有答题一律写在答题纸上，否则无效。

1、设 $f(x),g(x)$ 是复系数多项式，且 $(f(x),g(x))=1$，$\partial(f(x))\neq\partial(g(x))$，$c$ 是非零复数，证明：至少存在一个复数 α，使得 $\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=c$．（15 分）

2、设 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，其中 $b_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，$A$ 是一个主对角元为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的对角矩阵，求 $|A+\beta'\beta|$．（10 分）

3、设 A 是方阵，$A^k=0$ 对某个正整数 k 成立．求证下列方阵可逆，并求它们的逆．

(1) $E-A$；（3 分） (2) $E+A$；（3 分） (3) $E+A+\dfrac{1}{2!}A^2+\cdots+\dfrac{1}{(k-1)!}A^{k-1}$．（9 分）

4、证明：如果 A 是 n 阶方阵 $(n\geq 2)$，那么

$$\text{秩}(A^*)=\begin{cases} n, \text{当秩}(A)=n, \\ 1, \text{当秩}(A)=n-1, \\ 0, \text{当秩}(A)<n-1. \end{cases}$$（10 分）

5、(1) 设 A 是 n 阶实对称可逆矩阵，则 A 正定的充分必要条件是对任意的正定矩阵 B，AB 的迹 $tr(AB)>0$．（必要性 8 分，充分性 7 分）

(2) 证明：$A=\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$ 是半正定矩阵．（10 分）

6、设 P 是一个数域，V 是一元多项式环 $P[x]$ 中全体次数小于 n 的多项式以及零多项式构成的线性空间．令 $T: f(x)\to xf'(x)-f(x)$ 是从 V 到 V 的映射．证明：

(1) T 是一个线性变换．（5 分）

(2) 求T的核$\mathrm{Ker}T$以及象$\mathrm{Im}T$. (5分)

(3) 证明：$V=\mathrm{Ker}T\oplus\mathrm{Im}T$. (5分)

7、设$V=M_n(P)$是数域P上全体$n\times n$矩阵关于矩阵通常运算构成的线性空间，$A\in V$相似于一个对角矩阵. 设$T:X\to AX-XA$是V的线性变换，证明存在V的一组基，使得T在该基下的矩阵是对角矩阵. (15分)

8、设矩阵A和B相似，其中

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}.$$

(1) 求x,y的值. (5分)

(2) 求可逆矩阵P，使$p^{-1}AP=B$. (10分)

9、设$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&3\end{pmatrix}$，求

(1) $\lambda E-A$的行列式因子； (3分)

(2) $\lambda E-A$的不变因子； (3分)

(3) $\lambda E-A$的初等因子； (3分)

(4) A的最小多项式； (3分)

(5) A的若当标准形. (3分)

10、设A是n级正定矩阵，α,β是任意n维实列向量. 证明：

$$(\alpha'\beta)^2\le(\alpha'A\alpha)(\beta'A^{-1}\beta).$$ (15分)

2