

## 湖南师范大学

## 2005年研究生入学考试试题

考试科目：量子力学考试科目代码：349

注意：所有答案（含选择题、填空题、判断题、作图题等）一律答在答题纸上；  
写在试题纸上或其他地点一律不给分。

一、(20分) 写出量子力学的基本假设。

二、(20分) 设一维粒子的哈密顿量为

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x),$$

写出  $x$  表象中  $x$ 、 $p$  和  $H$  的矩阵元。

三、(30分) 设粒子处于一维无限深方阱中，

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \infty, & x < 0, x > a \end{cases}$$

- (1) 求粒子的能级  $E_n$  和归一化波函数  $\psi_n(x)$ ；  
(2) 证明对于此势阱中的粒子，其位置的平均值和涨落由下列关系式给出，

$$\bar{x} = \frac{a}{2}, \quad \overline{(x - \bar{x})^2} = \frac{a^2}{12} \left( 1 - \frac{6}{n^2\pi^2} \right);$$

- (3) 证明当  $n \rightarrow \infty$  时，上面的结果与相应的经典结果一致。

四、(25分) 已知  $\psi_1(x)$  和  $\psi_2(x)$  是粒子的哈密顿量  $H$  的两个本征态，对应的本征值分别是  $E_1$  和  $E_2$ 。设该粒子初始时刻 ( $t = 0$ ) 处于

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(x) + \psi_2(x)],$$

试求：

- (1) 粒子在时刻  $t > 0$  的波函数  $\psi(x, t)$ ；  
(2) 粒子能量的平均值  $\bar{H}$ ；  
(3) 粒子能量平方的平均值  $\overline{H^2}$ ；  
(4) 粒子能量的涨落  $\Delta E$ 。

五、(25分) 设非简谐振子的哈密顿量为  $H = H_0 + H'$ ,

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2, \quad H' = \beta x^3.$$

其中  $\beta$  为实数, 试用微扰论求其能量本征值 (准确到二级近似) 和本征函数 (准确到一级近似).

六、(30分) 设氢原子的状态是

$$\psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}R_{12}(r)Y_{11}(\theta, \varphi) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}R_{12}(r)Y_{10}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

- (1) 求轨道角动量  $z$  分量  $\hat{L}_z$  和自旋动量  $z$  分量  $\hat{S}_z$  的平均值;
- (2) 求总磁矩

$$\hat{M} = -\frac{e}{2\mu} \hat{L} - \frac{e}{\mu} \hat{S}$$

的  $z$  分量的平均值.