

# 2009 年全国硕士研究生入学考试 自命题科目试题册

业务课代码: 725

业务课名称: 量子力学

考生须知: 1、答案必须写在答题纸上, 写在其它纸上无效。

2、答题时必须使用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答, 用其他笔答题不给分。不得使用涂改液。

## 一、名词解释题 (共 30 分, 每小题 5 分)

(1) 波粒二象性; (2) 波函数; (3) 定态; (4) 束缚态; (5) 全同粒子; (6) 塞曼效应。

## 二、证明题 (共 40 分, 每小题 10 分)

1、设质量为  $m$  的粒子在势场  $V(r)$  中运动, 其波函数为  $\psi$ , 证明:

粒子的能量平均值为  $E = \int W d^3r$ , 其中  $W = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + \psi^* V \psi$ 。

2、设  $A$  和  $B$  为矢量算符,  $F$  为标量算符, 证明:

$$[F, A \cdot B] = [F, A] \cdot B + A \cdot [F, B].$$

3、设  $A$  与  $B$  是与 Pauli 算符  $\sigma$  对易的任何两个矢量算符, 证明:

$$(\sigma \cdot A)(\sigma \cdot B) = A \cdot B + i\sigma \cdot (A \times B).$$

4、对于 Pauli 算符  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , 证明: (1).  $e^{i\lambda\sigma_z} = \cos \lambda + i\sigma_z \sin \lambda$  ( $\lambda$  为常数);

(2).  $e^{i\lambda\sigma_z} \sigma_x e^{-i\lambda\sigma_z} = \sigma_x \cos(2\lambda) - i\sigma_y \sin(2\lambda)$  ( $\lambda$  为常数)。

## 三、计算题 (共 80 分, 每小题 20 分)

1、设一维粒子的哈密顿量为  $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ , (1) 写出  $x$  表象中  $x$ 、 $p$  和  $H$  的矩阵元; (2) 写出  $p$  表象中  $x$ 、 $p$  和  $H$  的矩阵元。

2、设粒子处于一维无限深方阱中,  $V(x) = \begin{cases} 0, & |x| < a \\ \infty, & |x| \geq a \end{cases}$ , 求粒子的能级  $E_n$  和归一化波函数  $\psi_n(x)$ 。

3、设体系的 Hamilton 量  $H$  (不显含时间) 可以分为两部分  $H = H_0 + H'$ , 其中  $H'$  为微扰部分, 已知  $H_0$  是非简并的, 本征方程为  $H_0 |\psi_k^{(0)}\rangle = E_k^{(0)} |\psi_k^{(0)}\rangle$ , 求该系统的本征能量 (准确到二级近似) 和本征函数 (准确到一级近似) 的微扰表达式。

4、在  $\sigma_z$  表象中, (1) 求  $\sigma \cdot \mathbf{n}$  的本征值和本征态,  $\mathbf{n}$  是  $(\theta, \varphi)$  方向的单位矢量;  
(2) 在  $\sigma \cdot \mathbf{n}$  的本征态, 求  $\sigma_z$  的平均值。提示:  $\sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$ 。