国防科技大学研究生院1999年硕士生入学考试

软件基础试题(可不抄题)(离散数学部分)

考生注意：1. 答案必须写在我校统一配发的专用答题纸上

2．统考生做一、1,2,3,4；二、1,2,3,4,5,6,7；三、$1^o,3^o,4^o,5^o$

3．单独考生做一、1,2,3,5；二、1,2,3,4,5,6,8；三、$1^o,2^o,4^o,5^o$

三、离散数学部分(30分)

1^o(6分) 若R为集合A上的二元关系，证明$R=R^{-1}\circ R$当且仅当R为对称的和传递的。

2^o(8分)(统考生不做，单独考生做)

设$<G,*,e>$为群且$a\in G$。若定义函数f_a：G→G如下：

$f_a(x)=axa^{-1},x\in G$

证明：f_a为群同构。

3^o(8分)(统考生做，单独考生有做)

设$<A,\le>$和$<B,\le'>$都是半序结构，函数F：A→B和G：B→A都是保序的。若对任意$a\in A$及$b\in B$皆有：$F(a)\le' b$当且仅当$a\le G(b)$。

证明对每个$a\in A$皆有：

i）$a\le G(F(a))$;

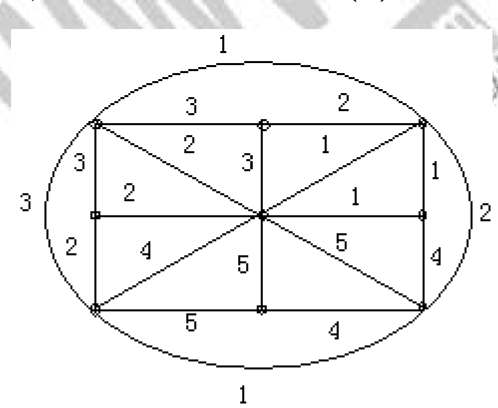
ii）$G(F(G(F(a))))\le G(F(a))$。

4^o(每小题3分，共6分)

i）计算并化简：$\bigcup\{P(P(P(\Phi))),P(P(\Phi)),P(\Phi),\Phi\}$。

ii) 求以下加权图的一个最小生成树：(见下页图)

(说明：若A为集合，则$P(A)$表示A的幂集)



5^o(每小题5分，共10分)

i）设R为二元谓词且a为个体常元。试判断合式公式$\forall xR(x,a)\to\exists y\forall xR(x,y)$是否为永真式，并证明你的结论。

ii）用自然推理系统证明：$A\to B, B\to C, A\to \neg C \vdash \neg A$

国防科技大学研究生院 1999 年硕士生入学考试

软件基础试题(可不抄题)

离散数学部分命题标准答案、评分标准

三、离散数学部分（30 分）

1^o (6 分，必要性和充分性各 3 分)证明

必要性：设 $R = R^{-1}\circ R$

i）因为 $R^{-1}=(R^{-1}\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ(R^{-1})^{-1}=R^{-1}\circ R=R$，所以 R 为对称的

ii）由 i）可知 $R^2=R^{-1}\circ R=R$，所以 R 是传递的。

充分性：

因为 R 为对称的和传递的，所以 $R=R^{-1}$ 且 $R^2\subseteq R$

i）若 $<a,b>\in R$，则由 $R=R^{-1}$ 得 $<b,a>\in R$，从而由 $R^2\subseteq R$ 得 $<a,a>\in R$

即 $<a,a>\in R^{-1}$，所以 $<a,b>\in R^{-1}\circ R$。这表明 $R\subseteq R^{-1}\circ R$

ii）由 $R=R^{-1}$ 及 $R^2\subseteq R$ 即得 $R^{-1}\circ R\subseteq R$，从而再由 i）即得到

$R=R^{-1}\circ R$。

2^o (8 分，证出 f_a 为双射得 4 分，证出 f_a 为同态得 4 分)

证明：

i）若 x，y $\in$G 使 $f_a(x) = f_a(y)$，即显然有 x = y，这表明 f_a 为内射。

ii）若 y $\in$G，则对 x= $a^{-1}ya$ 显然有 $f_a(x)=a(a^{-1}ya)a^{-1}$=y，所以 f_a 为满射，从而再由 i）即知 f_a 为双射。

iii） $f_a(e)=aea^{-1}=aa^{-1}=e$

iv）若 x，y$\in$G，则

$f_a(x*y)= a(x*y)a^{-1}=(axa^{-1})*(aya^{-1})=f_a(x)*f_b(y)$

综合 ii）、iii）和 iv）即知，f_a 为群同态。

3^o (8 分，证出 a≤GF(a)得 4 分，证出 a≤GF(a)得 4 分，证出 GFGF(a) ≤GF(a)得 4 分)。

证明：

因为 A 上的半序自反，所以对每个 a$\in$A 皆有 a≤ a，故由 G 和 F 保序得 F(a) ≤'F(a) 且 GF(a) ≤GF(a)。这时取 b = F (a) $\in$B

i）根据题设，由 F(a) ≤'b 得 a ≤ G(b)即 a ≤ GF(a)。

ii)因为 GF(a) ∈A，所以由题设及 GF(a) ≤ G(b)得

FGF(a) ≤' b 即 FGF(a) ≤' F(a)

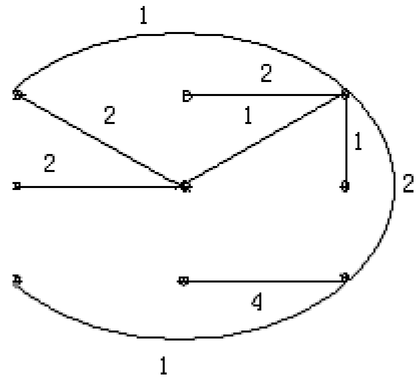
从而再由 G 保序得 GFGF(a) ≤ GF(a)

4^o (每小题 3 分，共 6 分)

i ）仅计算正确得 1~2 分。

$$\bigcup\{P(P(P(\Phi))),P(P(\Phi)),P(\Phi),\Phi\}$$
$$=\{P(P(\Phi)),P(\Phi),\Phi\}=\{\Phi,\{\Phi\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\}。$$

ii) 结果正确得 3 分。



5^o (每小题 5 分，共 10 分)

i ）给出正确的解释得 1~3 分，证明正确得 5 分。设 D 为任意一个论域，I 为 D 上任意一个解释且 a 在 I 下的值为$d_0\in$D.若$\forall xR(x,a)$在 I 下为真，则对每个$d\in$D 皆有 $\dfrac{R(d,d_0)}{T}$ 。所以 $\dfrac{\forall xR(x,d_0)}{T}$ ，从而得 $\dfrac{\exists y\forall xR(x,y)}{T}$ 。这表明 $\dfrac{\forall xR(x,a)\to\exists y\forall xR(x,y)}{T}$，因此$\forall xR(x,a)\to\exists y\forall xR(x,y)$为永真式。

ii) 关键步骤错，扣 1~2 分。演绎正确得 5 分。

①A →B，B →C，A → ┐C，A ├ A		(∈)
②……………………………………	├ A→B	(∈)
③……………………………………	├ B	①、②及(→₋)
④……………………………………	├ B→C	(∈)
⑤……………………………………	├ C	③、④及(→₋)
⑥……………………………………	├ A→ ┐C	(∈)
⑦……………………………………	├ ┐C	①、⑥及(→₋)
⑧ A → B，B → C，A → ┐C ├ ┐A		⑤、⑦及(┐₊)