中南大学

2002年研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

注：以下 R^2 表示 n 维实列向量空间，$R^{n\times n}$ 表示 n 阶实矩阵的全体，A^T 表示矩阵 A 的转置，$Tr(A)$ 表示矩阵 A 的迹。

一、（20 分）设 x_0 是 n 维欧氏空间 V 中非零向量，$k\in R, k\neq 0$，定义变换

$$Tx = x + k(x, x_0)x_0, x\in V$$

1．验证 T 是线性变换；

2．设 x_0 在 V 的标准正交基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 下的坐标为 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，求在该基下的矩阵；

3．证明 T 为对称变换，即 $(Tx, y) = (x, Ty)$，$\forall x, y\in V$；

4．证明：T 为正交变换的充要条件是 $k = -\dfrac{2}{|x_0|^2}$。

二、（16 分）设 $A\in R^{n\times n}$，记

$$C(A) = \{B : AB = BA, B\in R^{n\times n}\}.$$

1．证明：$C(A)$ 是 $R^{n\times n}$ 的子空间；

2．当 $A = I$ 时，求 $C(A)$；

3．当

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

时，求 $C(A)$ 的维数和一组基。

三、（16 分）设 $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ 为 n 维非零列向量，求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b^H \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

的特征值和特征向量，其中b^H表示列向量b的共轭转置。

四、（14 分）设$A\in R^{n\times n},b,x\in R^n$，证明线性方程组

$$A^T Ax = A^T b$$

必有解。

五、（12 分）设A,B为n阶实矩阵，证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} \geq 0.$$

六、（12 分）求证：A为幂零阵（即存在正整数m，使得$A^m=0$）的充要条件是：对任一自然数r，有$Tr(A^r)=0.$

七、（10 分）设A,B是n阶实对称矩阵，$|A|\neq 0$，证明：A为正定矩阵的充要条件是，对所有正定矩阵B，恒有$Tr(AB)>0.$