

中南大学

2002 年研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

一、(共 18 分，每小题 6 分) 求下列极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}, (x > 0);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x;$$

$$(3) \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \int_0^A |\sin x| dx.$$

二、(共 16 分，每小题 8 分) 设函数

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{x}, \quad x \in (0, 1)$$

(1) 证明 $f(x)$ 连续;

(2) $f(x)$ 是否一致连续? (请说明理由)。

三、(共 16 分，每小题 8 分)

(1) 设 $u = e^{ax+by}$, 求 n 阶全微分 $d^n u$;

(2) 设 $x = e^u \cos \theta$, $y = e^u \sin \theta$, 变换以下方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

四、(共 20 分，每小题 10 分)

(1) 求积分 $\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx$;

(2) 求曲面 $az = x^2 + y^2$ ($a > 0$), 和 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的体积。

五、(共 12 分，每小题 6 分) 设

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \cos \frac{n\pi}{2}}{1+n^q}, \quad (q > 0)$$

(1) 求 I 的条件收敛域;

(2) 求 I 的绝对收敛域。

六、证明：积分

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$$

是参数 a 的连续函数。

七、(8 分) 设定义于 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 存在三阶的导函数 $f^{(3)}(x)$ ，且

$$f(-1)=0, \quad f(1)=1, \quad f^{(1)}(0)=0$$

证明： $\sup_{x \in (-1,1)} f^{(3)}(x) \geq 3$ 。